EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN MEETKUNDE I

MAANDAG 15 JANUARI 2018

EERSTE BACHELOR FYSICA

EXAMENINSTRUCTIES

- Schrijf je antwoorden op het geruite papier. Gebruik een apart blad voor elke theorievraag en voor elke oefening.
- Vermeld je naam op elk blad, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.
- Leg je studentenkaart (of een ander identificatiebewijs) zichtbaar klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.
- Elke *poging* tot spieken kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens uit de eerste zittijd.
- Je beschikt over 4 uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de nota's (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle voorgaande deeltjes, ook als je die niet kunnen oplossen hebt.
- Veel succes!

Opgave 1. (5 punten)

In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(a) Verklaar de volgende twee uitspraken in het bewijs van Stelling 2.3.6 op pagina 50 .

(i) Verklaar (2.2):

$$\begin{aligned}(W_1 \cap W_2) \cap U_1 &= 0 \\ (W_1 \cap W_2) \cap U_2 &= 0\end{aligned}$$

(ii) In het bewijs van Stelling 2.3.6 op pagina 50 staat in de laatste paragraaf

"...en dus $v + w = -z \in W_1 \cap W_2$."

Verklaar.

(b) In het bewijs van Stelling 3.2.2 (i) op pagina 80 staat dat $\varphi(f) \circ \psi(f) = (\varphi\psi)(f)$. Verklaar.

(c) Verklaar de volgende twee uitspraken in het bewijs van Stelling 4.2.4 op pagina 92.

(i) "...merk op dat deze lineaire vorm surjectief is vermits $\langle w, w\rangle \neq 0$."

(ii) "Omdat $W \cap W^{\perp} = 0$, volgt hieruit dat $\{b_1, \ldots, b_d\}$ een basis is voor V."

(d) In het bewijs van Stelling 7.5.3 op pagina 157 staat op de laatste regel:

"...en we besluiten dat $L \cap D = \{q + \mathrm{proj}_{D_0}(p - q)\}$."

Verklaar.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 2. (1,5 punten)

Bewijs de volgende veralgemening van Lemma 2.3.2: Zij V, W_1, W_2, W_3 vectorruimten. Dan geldt $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ als en slechts als de volgende twee voorwaarden gelden: $V = W_1 + W_2 + W_3$ en $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}$.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 3. (3, 5 punten) In deze opgave wordt getoetst in hoeverre je vertrouwd bent met de verschillende begrippen en eigenschappen die we in de cursus ontmoet hebben.

(a) Toon aan dat de unie van twee vectordeelruimten opnieuw een deelruimte is als en slechts als één van beide een deelverzameling is van de andere.

(b) Stel dat A een 2018×2018-matrix is. Toon aan dat A inverteerbaar als en slechts als de lineaire operator horende bij A surjectief is.

(c) Zij f diagonaliseerbaar voor een eindig dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte V. Stel dat voor elke twee eigenvectoren v, w van f geldt dat $v + w = 0$ of $v + w$ is een eigenvector van f. Toon aan dat er een $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat zodat $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

(d) Beschouw een m-dimensionale deelruimte W van de n-dimensionale vectorruimte V. Toon aan dat de projectie-operator proj_W op W de eigenwaarde 0 heeft met algebraische en meetkundige multipliciteit $n - m$.

Oefeningen

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 4. (4 punten) Beschouw volgende matrix, met a een parameter in $\mathbb{R}$:

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & a+2 & -a-1 \end{pmatrix}$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van B.

(b) Voor welke waarden van a is de matrix B diagonaliseerbaar? Geef voor deze waarden een matrix P zodat $P^{-1}BP$ een diagonaalmatrix is. Motiveer je antwoord.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 5. (3,5 punten) Beschouw een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ waarvoor $g \circ g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.

(a) Voor willekeurige $v \in \mathbb{R}^4, v \neq 0$, toon aan dat v en $g(v)$ lineair onafhankelijk zijn. (Tip: bewijs vanuit het ongerijmde.)

Neem nu $v \in \mathbb{R}^4, v \neq 0$ vast en beschouw de deelruimte $V = \mathrm{span}(v, g(v))$.

(b) Bewijs: als $w \in V$, dan geldt $g(w) \in V$.

Neem een vector $z \notin V$. De verzameling $E = \{v, g(v), z, g(z)\}$ vormt een basis voor $\mathbb{R}^4$ (dit moet je niet bewijzen).

(c) Bepaal de matrixvoorstelling $A_{g,E,E}$ van g ten opzichte van deze basis E van $\mathbb{R}^4$.

(d) Geef een expliciet voorbeeld van een afbeelding g en een vector v en z die voldoen aan de gestelde voorwaarden.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 6. (2,5 punten) Beschouw de volgende drie hypervlakken met parameters a en b in $\mathbb{R}^3$.

$$H_1 = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + by + z = 1\}$$
$$H_2 = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (a+1)y + z = 2\}$$
$$H_3 = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid -y + x = b\}$$

(a) Bepaal $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$ voor de verschillende waarden van a en b.

(b) Schrijf de affiene deelruimte H_1 als $v + \mathrm{span}\{b_1, \ldots, b_k\}$, met v een vector en $\{b_1, \ldots, b_k\}$ een basis voor de onderliggende vectorruimte van H_1.

(c) Voor welke waarde(n) van b ligt de rechte $L = (1, 0, 0)^t + \mathrm{span}\{(1, 1, -1)^t\}$ in H_1. Voor welke waarde(n) staat L loodrecht op H_1?