Theorie

Opgave 1. (5 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(a) Verklaar de volgende twee uitspraken in het bewijs van Stelling 2.3.6 op pagina 50 .

(i) Verklaar (2.2):

$$
\begin{aligned}
(W_1 \cap W_2) \cap U_1 &= 0 \\
(W_1 \cap W_2) \cap U_2 &= 0
\end{aligned}
$$

(ii) In het bewijs van Stelling 2.3.6 op pagina 50 staat in de laatste paragraaf

"...en dus $v + w = -z \in W_1 \cap W_2$."

Verklaar.

(b) In het bewijs van Stelling 3.2.2 (i) op pagina 80 staat dat $\varphi(f) \circ \psi(f) = (\varphi\psi)(f)$. Verklaar.

(c) Verklaar de volgende twee uitspraken in het bewijs van Stelling 4.2.4 op pagina 92.

(i) "...merk op dat deze lineaire vorm surjectief is vermits $\langle w, w\rangle \neq 0$."

(ii) "Omdat $W \cap W^{\perp} = 0$, volgt hieruit dat $\{b_1, \ldots, b_d\}$ een basis is voor V."

(d) In het bewijs van Stelling 7.5.3 op pagina 157 staat op de laatste regel:

"...en we besluiten dat $L \cap D = \{q + \mathrm{proj}_{D_0}(p - q)\}$."

Verklaar.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 2. (1,5 punten) Bewijs de volgende veralgemening van Lemma 2.3.2: Zij V, W_1, W_2, W_3 vectorruimten. Dan geldt $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ als en slechts als de volgende twee voorwaarden gelden: $V = W_1 + W_2 + W_3$ en $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}$.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 3. (3,5 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(a) De unie van twee vectordeelruimten is opnieuw een deelruimte als en slechts als één van beide een deelverzameling is van de andere.

(b) Stel dat A een 2018×2018-matrix is. Dan is A inverteerbaar als en slechts als de lineaire operator horende bij A surjectief is.

(c) Zij f diagonaliseerbaar voor een eindig dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte V. Stel dat voor elke twee eigenvectoren v, w van f geldt dat $v + w = 0$ of $v + w$ is een eigenvector van f, dan bestaat er een $\lambda \in \mathbb{C}$ zodat $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

(d) Beschouw een m-dimensionale deelruimte W van de n-dimensionale vectorruimte V. Dan bezit de projectie-operator proj_W op W de eigenwaarde 0 met algebraische en meetkundige multipliciteit $n - m$.

Oefeningen

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 4. (4 punten) Beschouw volgende matrix B, met parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & a+2 & -a-1 \end{pmatrix}$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van B.

(b) Voor welke waarden van a is de matrix B diagonaliseerbaar? Geef voor deze waarden een matrix P zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is. Motiveer je antwoord.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 5. (4 punten) Beschouw een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ waarvoor $g \circ g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.

(a) Voor willekeurige $v \in \mathbb{R}^4, v \neq 0$, toon aan dat v en $g(v)$ lineair onafhankelijk zijn.

Neem nu $v \in \mathbb{R}^4, v \neq 0$ vast en beschouw de deelruimte $V = \mathrm{span}(v, g(v))$.

(b) Bewijs: als $w \in V$, dan geldt $g(w) \in V$.

Neem een vector $z \notin V$.

(c) Toon aan dat $E = \{v, g(v), z, g(z)\}$ een basis vormt voor $\mathbb{R}^4$.

(d) Bepaal de matrixvoorstelling $A_{g,E,E}$ van g ten opzichte van deze basis E van $\mathbb{R}^4$.

(e) Geef een expliciet voorbeeld van een afbeelding g en een vector v en z die voldoen aan de gestelde voorwaarden.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 6. (2 punten)

(a) Zij $f, g \in \mathrm{End}(V)$ en stel dat v een eigenvector van $f \circ g$ is voor eigenwaarde λ. Stel dat $g(v) \neq 0$. Toon aan dat $g(v)$ een eigenvector is van $g \circ f$ voor eigenwaarde λ.

(b) Zij $f, g \in \mathrm{End}(V)$, voor een eindigdimensionale ruimte V. Toon aan dat $f \circ g$ en $g \circ f$ dezelfde eigenwaarden hebben.