UNIVERSITEIT GENT

Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

Oefeningendeel – 14 juni 2018

Schriftelijke oefeningen (gesloten boek)

1. Beschouw een complexe $m \times n$ matrix A. Veronderstel nu dat je twee kolommen van A van plaats verwisselt, resulterend in de matrix B. Hebben A en B dan dezelfde singuliere waarden? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

2. Onderzoek de evenwichtspunten en bifurcatiepunten van het volgende stelsel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - \mu\\ \dot{x}_2 &= \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)(x_1 + x_2 - 1)\end{aligned}$$

   (a) Eén tak evenwichtspunten wordt gegeven door $x_1 = 1 - \mu$, $x_2 = \mu$. Bepaal ook de andere evenwichtspunten.

   (b) Bepaal de stabiliteit en de aard van de evenwichtspunten voor de tak $(x_1, x_2) = (1-\mu, \mu)$.

   (c) Teken de lijnen waar $\dot{x}_1$ en $\dot{x}_2$ gelijk zijn aan nul voor enkele waarden van μ. Bepaal aan de hand van deze figuur de bifurcatiepunten (x_1^*, x_2^*, μ^*).

PC-oefeningen (open boek)

3. Beschouw de volgende 2-staps gepartitioneerde Runge-Kutta-methode:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & a & b \\ 1 & c & d \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

   (a) Bepaal de waarden van a, b, c en d zodat de methode symplectisch is.

   (b) Pas deze methode toe op de bewegingsvergelijkingen van de harmonische oscillator ($H = \frac{p^2}{2} + \frac{k^2 q^2}{2}$). Schrijf de methode in expliciete vorm (schrijf p_{n+1} en q_{n+1} in termen van p_n en q_n).

   (c) Implementeer de methode in Matlab. Stel $k = 1.5$ en kies een stapgrootte $h = 0.10$ en bereken de numerieke oplossing in. De beginwaarden zijn $p(0) = 1$ en $q(0) = 1$. Bereken voor beide methoden de fout op de Hamiltoniaan in de punten $t = 2\pi$, $t = 20\pi$ en $t = 200\pi$.

4. Beschouw het volgende probleem:

$$-y'' + \ln(x)\, y = E\, y$$

met randvoorwaarden $y(1) = 0$ en $y(5) = 0$

(a) Geef de 10e, 11e en 12e eigenwaarde van het probleem, tot op 8 cijfers na de komma.

(b) Gegeven een probleem van de vorm $y'' = f(x, y)$, dan wordt de eenvoudige centrale differentie methode gegeven door:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \qquad \text{met } y_i = y(x_i) \text{ en } f_i = f(x_i, y_i)$$

Zoek nu numeriek de 10e tot en met de 12e eigenwaarde van het Sturm-Liouville probleem met behulp van deze methode. Gebruik stapgrootte 0.05. Geef deze numerieke benaderingen opnieuw tot op 8 cijfers na de komma.

(c) Pas Prüfer-getransformeerde multiple shooting toe met matching point $x = 3$. Hoeveel eigenwaarden zitten er volgens deze numerieke benadering in het interval $[200, 800]$? Leg uit hoe je hieraan komt. Komt dit overeen met het werkelijk aantal eigenwaarden tussen 200 en 800?