Oefening 1 (5 punten). Zij $H = \{1, -1\}$, de cyclische groep van orde 2. Beschouw de groep $G = H \ltimes \mathbb{Z}$ waarbij de actie van $-1 \in H$ gegeven wordt door

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto -x.$$

$(\mathbb{Q}, +)$

(i) Bepaal de afgeleide groep G'.

(ii) Is G nilpotent? Is G oplosbaar?

(iii) Toon expliciet aan dat

$$\langle a, b \mid b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle$$

en

$$\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle$$

presentaties zijn voor G.

(iv) Toon verder aan dat $G/G' \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$.

Oefening 2 (4 punten). Beschouw een eindige oplosbare groep G. Zij H een maximale deelgroep van G. Toon aan dat $|G/H|$ een priemmacht is. (*Hint:* Beschouw een minimale normaaldeler N van G. Maak onderscheid tussen $N \leq H$ en $N \not\leq H$, waarbij je gebruik kan maken van oefening 20 voor het tweede geval.) elke

Oefening 3 (4 punten). Zij G een eindige groep. Toon aan dat er een Galoisuitbreiding E/F bestaat met Galoisgroep G. (*Hint:* Beschouw algebraïsche uitbreidingen van $\mathbb{Q}$ en toon het gestelde eerst aan voor $G = \mathbf{S}_n$.)

voor een F

Oefening 4 (4 punten). Zij F een veld van karakteristiek p. Beschouw $f(x) = x^p - x - a$, met $a \in F$.

(i) Toon aan dat f irreducibel is over F als en slechts als er geen $\beta \in F$ bestaat zodat $\beta^p - \beta = a$.

(ii) Veronderstel dat f irreducibel is over F en stel $E = F[x]/(f)$. Toon aan dat E/F een Galoisuitbreiding is met Galoisgroep $\mathbf{C}_p$.

Oefening 5 (3 punten). Toon aan dat $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}(t)/\mathbf{C}(t^n)) \cong \mathbf{C}_n$.

Algebra II eerste zit, 2018-2019
Dit deel (oefeningen) stond op 10/20 punten.
Professor Tom De Medts