Discrete Wiskunde I

Theorie

Vraag 1

Beschouw een homogene lineaire recurrente betrekking met voortbrengende functie $g(x)$. Geef en bewijs het verband tussen deze betrekking en zijn voortbrengende functie $g(x)$.

Vraag 2

Geef de definitie van Eulers totiëntfunctie φ en leg uit hoe de formule voor $\varphi(n)$ volgt uit de multiplicativiteit van φ.

Bekijk onderstaand bewijs voor

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \qquad , n \geq 1$$

en beantwoord de vijf bijhorende vragen.

Bewijs. We bewijzen de stelling door middel van inductie. Het geval $n = 1$ is triviaal.[a] Stel dus $n = mp^e$, p een priemgetal, $e \geq 1$, $\text{ggd}(m, p) = 1$, en veronderstel dat de stelling waar is voor $m < n$. Elke deler van mp^e is van de vorm dp^i, $d|m$, $0 \leq i \leq e$.[b] Er volgt dus

$$\begin{aligned}
\sum_{d|mp^e} \varphi(d) &= \sum_{d|m} \varphi(d) + \sum_{d|m} \varphi(dp) + \cdots + \sum_{d|m} \varphi(dp^e) && (c) \\
&= m + m\varphi(p) + \cdots + m\varphi(p^e) && (d) \\
&= m(1 + \varphi(p) + \cdots + \varphi(p^e)) \\
&= \ldots && (e)
\end{aligned}$$

□

(a) Bewijs de stelling expliciet voor $n = 1$.

(b) Verklaar deze zin.

(c) Verklaar de overgang van het linkerlid naar het rechterlid in deze regel.

(d) Verklaar de overgang van het rechterlid van de vorige regel naar het rechterlid in deze regel.

(e) Vervolledig het bewijs. Leg bij elke stap uit waarom dit zo is.

Vraag 3 mondeling

Geef de definities van een domein en van een lichaam. Toon ook aan dat elk eindig domein een lichaam is.

Vraag 4

(a) Om een kaartenhuisje te bouwen met één verdieping, heb je twee kaarten nodig. Om er één te bouwen met twee verdiepingen, heb je zeven kaarten nodig. Om er een te bouwen met drie verdiepingen, heb je vijftien kaarten nodig. Stel de recurrente betrekking op voor het aantal kaarten a_n nodig om een kaartenhuisje met n verdiepingen te bouwen in functie van a_{n-1}. Los deze recurrente betrekking op.

(b) We beschouwen de relatie 'bevriend zijn met' als een antireflexieve, symmetrische relatie. Toon aan dat in een groep met n personen er altijd een even aantal personen is met een oneven aantal vrienden.

(c) Toon aan dat alle elementen van het Galois-veld $GF(2^h)$ een unieke vierkantswortel hebben.

(d) Waar of niet waar? Als de verzameling X aftelbaar oneindig is, dan is de verzameling $\{X \cup x\}$ met $x \notin X$ ook aftelbaar oneindig. Bewijs.

(e) Het laatste cijfer van $n!$ met $n \geq 5$ is altijd 0. Wat zijn de opties voor het meest rechtse niet-nul cijfer van $n!$, $n \geq 5$?

Oefeningen

Oefening 1

We werken over het eindig veld $\mathbb{F}_2$.

(a) Toon aan dat $t^4 + t^2 + t$, $t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ en $t^4 + 1$ niet primitief zijn.

(b) Beschouw nu de primitieve polynoom $t^4 + t + 1$ over $\mathbb{F}_2$. Stel de Zech-logtabel op voor $\mathbb{F}_{16}$.

(c) Los op over $\mathbb{F}_{16}$: $x^4 + (t^3 + 1)x^2 + t^2 = 0$

Oefening 2

Los de equivalentie op modulo $592 = 7 \cdot 8 \cdot 18$.

$$x^{18} \equiv 7^{99} - 7 \pmod{952}$$

Oefening 3

Naar aanleiding van het 200 jaar bestaan van de Universiteit Gent, werd er in oktober een groot verjaardagsfeest georganiseerd. De UGent heeft 9000 werknemers, waarvan 3500 PhD-studenten, 1500 professoren, 1300 postdocs en een groep van het administratief en technisch personeel (ATP). Uit deze werknemers wou de UGent er 1000 selecteren om mee te helpen aan het verjaardagsevenement, waaronder tussen de 250 en de 350 PhD-studenten, tussen de 200 en 400 professoren, 250 à 350 postdocs en 100 à 200 ATP'ers.

Op hoeveel verschillende manieren (d.w.z. het aantal medewerkers per type) kon de UGent er 1000 kiezen voor het grote evenement?

Oefening 4

(a) Beschouw disjuncte verzamelingen A en B met $|A| = |B| = 8$. Bepaal op 2 manieren het aantal koppels (X, Y) met $X \subseteq A$ en $Y \subseteq (B \cup X)$ met $|Y| = 8$.

(b) Toon aan dat volgende gelijkheid geldt, met $m, n, k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{m}{m-k} 2^k$$