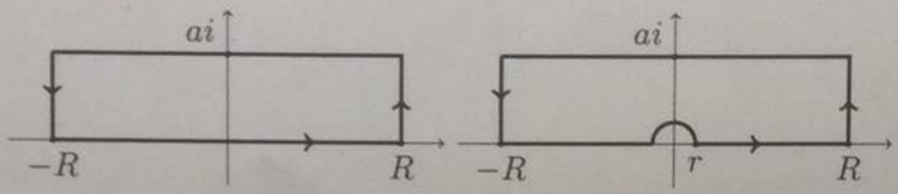
Oefeningenexamen complexe analyse

1. Zij $b \notin \mathbb{N}$, $0 < b < 3$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Bereken de integraal

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bx}\sin(\lambda x)}{(e^{2x}+1)(e^{x}+2)}dx$$

door een gepaste functie langs een contour Γ zoals in figuur II te integreren. $(a = 2\pi)$



Figuur II

2. Verklaar of weerleg de stappen in de volgende redenering:

Stelling 1 *Zij f holomorf in $B(0,R)$ zodat $f(0)=0$, $f'(0) \neq 0$ en $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in B(0,R)$. Zij*

$$r := \frac{R^2\,|f'(0)|}{4M}; \quad \rho := \frac{R^2\,|f'(0)|^2}{6M}$$

Dan bestaat er voor elke $w_0 \in B(0,\rho)$ een unieke $z_0 \in B(0,r)$ zodat $f(z_0) = w_0$.

Bewijs. We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $M = R = 1$ [1]. We hebben dat $|f'(0)| \leq 1$ [2]. Zo is $r \leq 1/4$ zodat f al zeker gedefinieerd is op $B(0,r)$. Laat $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ de Taylorontwikkeling van f rond 0 zijn. We hebben ook dat [3]

$$|f(z) - c_1 z| \leq M(r)\frac{|z|}{r}, \quad z \in B(0,r),$$

waar

$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z) - c_1 z|\,.$$

Er volgt dat voor $|z| \leq r$ geldt dat

$$|f(z)| \overset{[4]}{\geq} |c_1|\,|z| - M(r)\frac{|z|}{r} = \frac{|z|}{r}\left(|c_1|\,r - M(r)\right).$$

Verder hebben we

$$\begin{aligned}
|c_1|\,r - M(r) &\overset{[5]}{\geq} |c_1|\,r - \sum_{k=2}^{\infty} |c_k|\,r^k \\
&\overset{[6]}{\geq} |c_1|\,r - \sum_{k=2}^{\infty} r^k \\
&\overset{[7]}{\geq} |f'(0)|\,r - \frac{4r^2}{3} \\
&= \frac{|f'(0)|^2}{6} = \rho(>0).
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat f slechts 1 nulpunt heeft binnen $B(0,r)$ (als $z=0$) en dat $|f(z)| \geq \rho$ voor $|z| = r$. Zij $w_0 \in B(0,\rho)$ willekeurig. Uit de stelling van Rouché [8] volgt dan dat $f(z)$ en $f(z) - w_0$ hetzelfde aantal nulpunten (namelijk 1) hebben binnen $B(0,r)$ en dus bestaat er een unieke $z_0 \in B(0,r)$ zodat $f(z_0) = w_0$. □

[1,2,4,5,7] Verklaar.
[3] Uit welke stelling volgt dit?
[6] Waarom is $|c_k| \leq 1$ voor alle k?
[8] Hoe past men hier de stelling van Rouché toe?

3. Zij f en g twee gehele functies zodat $|g(z)| \leq |f(z^2)|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat g even is, i.e. voor alle voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt $g(z) = g(-z)$.

4. Zij $\Omega = \{z : 1 < |z| < 2\}$.

   (a) Zij F holomorf op Ω. Toon aan dat F een primitieve heeft (op Ω) als en slechts als $\int_{\partial B(0,3/2)_+} F(z)\mathrm{d}z = 0$.

   (b) Zij f holomorf op Ω en veronderstel dat f geen nulpunten heeft in Ω. Toon aan dat er $n \in \mathbb{Z}$ en g holomorf op Ω bestaan zodat $f(z) = z^n e^{g(z)}$.