Naam:

Zij G een willekeurige groep.

- ⋆ Definieer de n-de centrale afgeleide $G^{[n]}$, en het n-de centrum $Z_n(G)$. Wanneer noemen we G nilpotent?

- ⋆ Bewijs dat $G^{[n]} = 1$ als en slechts als $Z_n(G) = G$.

- ⋆ Geef een voorbeeld van een eindige groep die niet nilpotent is.

Naam:

Zij G een eindige groep.

- ⋆ Definieer de n-de centrale afgeleide $G^{[n]}$, en het n-de centrum $Z_n(G)$. Geef twee equivalente definities van nilpotentie, gebruik makend van deze twee concepten. (Je hoeft niet te bewijzen dat deze definities equivalent zijn.)

- ⋆ Toon aan dat G nilpotent is als en slechts als G het direct product is van zijn Sylow deelgroepen. (Bewijs hierbij ook de nodige lemma's.)

Naam:

Bewijs dat de alternerende groepen $\mathbf{A}_n$ ($n \geq 5$) enkelvoudig zijn. Behandel de gevallen $n = 5$ en $n > 5$ afzonderlijk.

Naam:

Zij F een veld, en $f \in F[x]$ een niet-nul polynoom.

- ⋆ Wat is een *splijtveld* van f over F?

- ⋆ Veronderstel dat E en M twee splijtvelden zijn van f over F. Bewijs dat E en M dan F-isomorf zijn. (Bewijs hierbij ook het lemma dat hieraan vooraf gaat.)

Naam:

- ⋆ Wat is een (antitone) *Galois-connectie*? Wat bedoelen we met *gesloten elementen* in een Galois-connectie?

- ⋆ Leg uit op welke manier velduitbreidingen en Galoisgroepen een Galois-connectie vormen (met bewijs). Wat zijn de gesloten elementen in dit geval?

- ⋆ Zij E/F een velduitbreiding, en zij $f \in F[x]$ een niet-nul polynoom dat ten minste één wortel heeft in E. Leg uit waarom de Galoisgroep $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ werkt op de verzameling van alle wortels van f in E, en bewijs dat deze actie transitief en getrouw is als f irreducibel is en E een splijtveld is van f over F.

Naam:

Zij E/F een velduitbreiding van eindige graad.

- $\star$ Wanneer noemen we E/F *separabel*?
- $\star$ Veronderstel nu dat E/F separabel is. Bewijs dat $E = F[\alpha]$ voor een zekere $\alpha \in E$.
- $\star$ Gebruik deze stelling om te bewijzen dat als E/F Galois is (nog steeds van eindige graad), dan $|\mathrm{Gal}(E/F)| = [E : F]$.

Naam:

Zij F een veld.

⋆ Wat is een *primitieve n-de eenheidswortel* in F? Toon aan dat de verzameling van alle n-de eenheidswortels in F een cyclische deelgroep is van $F^\times$ met orde een deler van n.

⋆ Zij nu E/F een velduitbreiding, en veronderstel dat F een primitieve n-de eenheidswortel bevat. Formuleer en bewijs nu de stelling van Kummer.

Naam:

- ⋆ Wat is een *vrije groep*?
- ⋆ Bewijs dat een vrije groep over een verzameling X op isomorfisme na volledig is bepaald door de kardinaliteit $|X|$ van X.
- ⋆ Wat is een *presentatie* van een groep? Illustreer dit aan de hand van de cyclische groep C_n; bewijs hierbij dat de presentatie die je opgeeft, een presentatie is.
- ⋆ Bewijs dat elke groep een presentatie heeft.

(VB1) Wanneer is een groep G het semidirect product van twee van zijn deelgroepen? Illustreer dit op $\mathbf{S}_n$.

(VB2) Wat is een compositierij? Geef een compositierij van de groep $\mathbf{D}_{24}$.

(VB3) Elke eindige p-groep heeft een normaaldeler van index p.

(VB4) Het centrum van $\mathbf{S}_n$, $n \geq 3$, is triviaal.

(VB5) Elke groep is het quotiënt van een vrije groep.

(VB6) Zij K/F een velduitbreiding, en $\alpha \in K$. Definieer het minimaalpolynoom van een $\alpha \in K$, en bewijs dat het irreducibel is.

(VB7) Zij F een veld, K/F eindig van graad n, en $\alpha \in K$. Dan is α algebraisch, en $\deg(\alpha) \mid n$.

(VB8) Geef een voorbeeld van een inseparabel polynoom (en bewijs).

(VB9) De Galoisgroep van een eindige velduitbreiding is eindig.

(VB10) Hoe kan je over een willekeurig niet-perfect veld een zuiver inseparabele uitbreiding maken?