Algebra I 2018-2019 Oefeningen

Vraag 1

Beschouw de actie van een groep G op zichzelf door rechtse vermenigvuldiging. Zij $\rho : G \to \mathrm{Sym}(G)$ de corresponderende permutatierepresentatie. Beschouw ook de actie van G op zichzelf gegeven door $h^g = g^{-1}h$ met $h, g \in G$. Zij $\lambda : G \to \mathrm{Sym}(G)$ de corresponderende permutatierepresentatie.

1. Toon aan dat $\mathrm{im}(\lambda) \leq C_{\mathrm{Sym}(G)}(\mathrm{im}(\rho))$.
2. Toon aan dat $g^\rho = g^\lambda$ als en slechts als g een element is van orde 1 of 2 dat bevat is in het centrum van G.
3. Bewijs: $\mathrm{im}(\rho) \cap \mathrm{im}(\lambda) = Z(G)^\rho = Z(G)^\lambda$.

Vraag 2

Zij G een groep van orde 60, die meer dan 1 Sylow-5-deelgroep heeft. Bewijs dat G enkelvoudig is. Ga te werk door uit het ongerijmde te stellen dat H een echte niet-triviale normaaldeler is van G. (Hint: $N \underset{\text{char}}{\trianglelefteq} H \trianglelefteq G \Rightarrow N \trianglelefteq G$.)

1. Bewijs dat een groep van orde 30 altijd een normaaldeler heeft van orde 5.
2. Stel $|H| \in \{6, 12\}$. Bewijs nu dat G nog een normaaldeler heeft van orde 2,3 of 4.
3. Stel nu $|H| \in \{2, 3, 4\}$. Bewijs dat G een normaaldeler heeft met orde een macht van 5. (Hint: Beschouw G/H.)
4. Stel tenslotte $5 \big| |H|$. Toon aan dat $|H| = 30$ en haal hier een tegenstrijdigheid uit.

Vraag 3

Zij R een UFD met de eigenschap dat ieder niet-nul priemideaal maximaal is. Bewijs dat R een PID is.

1. Bewijs dat een priemideaal een hoofdideaal is. (Hint: Stel P een priemideaal, stel $p \in P$ en factoriseer p.)
2. Zij S de verzameling van alle idealen die geen hoofdideaal zijn. Stel $S \neq \emptyset$. Toon aan dat de poset $(S, \subset)$ een maximaal element P heeft.
3. Toon aan dat P een priemideaal is en haal hieruit dat $S = \emptyset$. (Hint: stel $a, b \in R$ met $ab \in P$ en beschouw de idealen $I \coloneqq P + aR$ en $J \coloneqq \{r \in R | ar \in P\}$.)

Vraag 4

Zij R een ring. Een deelmoduul N van een R-moduul M wordt *dicht* genoemd als en slechts als voor alle $x, y \in M$, met $x \neq 0$, er een $r \in R$ bestaat met de eigenschap dat $rx \neq 0$ en $ry \in N$. Zij nu M een R-moduul en $N \leq M$. Toon aan dat N dicht is als en slechts als voor alle deelgroepen P met $N \leq P \leq M$ en voor alle morfismen $\phi : P/N \to M$ geldt dat $\phi = 0$.

Naam:

- ⋆ Zij G een willekeurige groep, en veronderstel dat A en B normaaldelers zijn van G met $A \cap B = 1$. Toon aan dat $AB \trianglelefteq G$ en dat $AB \cong A \times B$.
- ⋆ Gebruik dit om aan te tonen dat $\mathbf{C}_{2018} \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_{1009}$.
- ⋆ Toon aan dat $\mathbf{C}_{20 \cdot 18} \ncong \mathbf{C}_{20} \times \mathbf{C}_{18}$.
- ⋆ Hoeveel verschillende (niet-isomorfe) abelse groepen van orde 2018 zijn er?

[Opmerking: de priemontbinding van 2018 is $2 \cdot 1009$.]

Naam:

- ⋆ Zij G een eindige groep, en p een priemgetal. Bewijs dat G minstens één Sylow p-deelgroep heeft.

- ⋆ Hoeveel Sylow p-deelgroepen heeft $\mathbf{S}_p$ (p priem)?

Naam:

- ⋆ Wat is een Euclidisch domein?
- ⋆ Toon aan dat elk Euclidisch domein een hoofdideaaldomein is.
- ⋆ Toon aan dat $\mathbb{Z}[i]$ een Euclidisch domein is.
- ⋆ Ontbind 2018 in irreducibele factoren in $\mathbb{Z}[i]$. Bewijs hierbij ook dat de factoren die je bekomt, inderdaad irreducibel zijn.

[Opmerking: de priemontbinding van 2018 in $\mathbb{Z}$ is $2 \cdot 1009$, en $1009 = 28^2 + 15^2$.]

Naam:

⋆ Zij R een domein. Wat bedoelen we met priemelementen en irreducibele elementen in R? Waarom is elk priemelement ook irreducibel?

⋆ Zij R een domein met ACC op hoofdidealen. Bewijs dat R een UFD is als en slechts als elk irreducibel element priem is.

⋆ Zij nu $R = \mathbb{Q}[x]$. Voldoet R aan ACC op hoofdidealen? Voldoet R aan DCC op hoofdidealen?

Naam:

Zij R een commutatieve ring met 1.

- $\star$ Wat is een *vrij* R-moduul, en wat is een *projectief* R-moduul?
- $\star$ Toon aan dat elk vrij R-moduul projectief is.
- $\star$ Zij $\theta\colon A \to F$ een epimorfisme van een willekeurig R-moduul A naar een niet-triviaal vrij R-moduul F, en neem aan dat θ geen isomorfisme is. Toon aan dat dit aanleiding geeft tot een niet-triviale decompositie van het moduul A. (Hierbij noemen we een decompositie $A = B \oplus C$ niet-triviaal als noch A noch B triviaal zijn.)
- $\star$ Bewijs dat het $\mathbb{Z}$-moduul $M = \mathbb{Z}/2018\mathbb{Z}$ niet projectief is, door te bewijzen dat de natuurlijke projectie $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2018\mathbb{Z}$ onmogelijk een sectie kan hebben.

Naam:

Zij F een algebraïsch gesloten veld, en zij $R = F[x]$. Zij verder V een eindig-dimensionale F-vectorruimte, en $f \in \mathrm{End}_F(V)$ een lineaire operator op V.

- ⋆ Leg uit hoe V de structuur krijgt van een R-moduul (afhankelijk van f).
- ⋆ Waarom is dit R-moduul eindig voortgebracht?
- ⋆ Leg uit hoe een directe som van R-modulen overeenkomt met een blokmatrixvoorstelling van f.
- ⋆ Wat is een Jordan normaalvorm voor f? Toon aan dat f een Jordan normaalvorm heeft.
- ⋆ Veronderstel nu dat $F = \mathbb{R}$, en dat $V \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ als $\mathbb{R}[x]$-moduul. Toon aan dat f geen Jordan normaalvorm heeft.

Groepen

(1) Volgt uit $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ dat $A \trianglelefteq G$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(2) Toon aan dat elke deelgroep van G/N van de vorm H/N is.

(3) Zij G een abelse enkelvoudige groep, $G \neq 1$. Toon aan dat $G \cong \mathbf{C}_p$.

Ringen

(1) Geef een voorbeeld van een domein dat geen PID is (en bewijs).

(2) Toon aan dat elke ring een maximaal ideaal heeft.

(3) Is het polynoom $x^{2018} - 2018$ irreducibel in $\mathbb{Q}[x]$?

Modulen

(1) Bewijs: Een eindig voortgebracht vrij R-moduul is isomorf met R^n voor zekere n.

(2) Leg uit hoe een vrij $F[x]$-moduul van rang 1 kan gezien worden als een aftelbaar oneindig-dimensionale vectorruimte voorzien van een shift-operator.

(3) Leg uit waarom elk (eindig voortgebracht) projectief moduul over een PID ook vrij is.