Complexe Analyse 2018-2019

Theorie gesloten boek (op 12 pt)

Vraag 1

Toon aan (en vul aan). Zij Γ een [vul aan]. Zij f meromorf in $[\Gamma]$. Veronderstel dat f geen nulpunten en geen polen heeft op Γ. Dan is

$$W(f(\Gamma_+), 0) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{mult}_{z=z_j} f(z)$$

waarbij $z_1, \ldots, z_n$ alle nulpunten en polen zijn van f in $]\Gamma[$.

Vraag 2

Toon aan (en vul aan). Formuleer (=geef de opgave) zonder bewijs de hulpstellingen die je in je bewijs gebruikt. Zij $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ een [vul aan]. Zij f een continue afbeelding $\Omega \to \mathbb{C}$. Dan zijn equivalent:

1. f is holomorf in Ω.
2. $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ voor elke gesloten contour $\Gamma \subseteq \Omega$.

2'. $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ voor elke gesloten gebroken lijn $\Gamma \subseteq \Omega$.

3. $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ is onafhankelijk van de contour $\Gamma \subseteq \Omega$ met gegeven begin- en eindpunt.

3'. $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ is onafhankelijk van de gebroken lijn $\Gamma \subseteq \Omega$ met gegeven begin- en eindpunt.

4. f heeft een primitieve op Ω.

Vraag 3

Beantwoord de vragen.

Stelling. *Zij $R > 0$. Dan is f holomorf in $B'(0, R)$ als en slechts als er complexe constanten a_m $(m \in \mathbb{Z})$ bestaan met de eigenschap dat voor elke $z \in B'(0, R)$*

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m$$

In dat geval worden de coëfficienten uniek bepaald door

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(z)}{z^{m+1}} \mathrm{d}z \qquad (m \in \mathbb{C})$$

als $0 < r < R$ willekeurig.

Bewijs. $\Leftarrow$: Door het gegeven heeft $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{-n}z^n$ als convergentiestraal $+\infty$.[**1**] Hierdoor is f holomorf op $B'(0,R)$. Kies nu willekeurig $0 < r < R$. Door de gelijkmatige convergentie mogen we som en integraal verwisselen:

$$\int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(z)}{z^{m+1}} \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\partial B_+(0,r)} z^{n-m-1} \mathrm{d}z = 2\pi i a_m$$

voor elke $m \in \mathbb{Z}$. Vullen we de coëfficiënten in in de vergelijking, dan vinden we voor $0 < r' < |z| < r < R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(\zeta)z^n}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r')} \frac{f(\zeta)\zeta^{n+1}}{z^n} \mathrm{d}\zeta$$

Vanwege de gelijkmatige convergentie kunnen we opnieuw de som en de integraal verwisselen. Dus is

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: We nemen nu enkel aan dat f holomorf is op $B'(0,R)$. Dan moeten we enkel aantonen dat $f(z)$ gelijk is aan het rechterlid op de laatste regel hierboven voor $0 < r' < |z| < r < R$, want dan volgt het gevraagde door de gelijkheden in de omgekeerde richting te doorlopen. [**2**] Kies $z \in B'(0,R)$ met $0 < r' < |z| < r < R$. Dan is

$$\int_{\partial B_+(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \overset{[\mathbf{3}]}{=} \int_{\Gamma_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Hieruit volgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \overset{[\mathbf{4}]}{=} f(z)$$

met $\Gamma' \subseteq B'(0,R)$ een eenvoudige kromme met $z \in]\Gamma'[$. [**5**] $\square$

(1),(2),(5) Verklaar het onderlijnde.

(3),(4) Verklaar de gelijkheid.

Vraag 4

Beantwoord de vragen.

Stelling. *Gegeven een rij* $(z_n)_n$ *van verschillende complexe getallen met* $|z_n| \to +\infty$ *als* $n \to +\infty$ *en een rij van singuliere delen*

$$B_n(z) := \frac{b_{1,n}}{z - z_n} + \cdots + \frac{b_{N_n,n}}{(z - z_n)^{N_n}},$$

dan bestaat een meromorfe functie op heel $\mathbb{C}$ *die enkel polen heeft in* z_n *en waarvan* $B_n(z)$ *het singulier deel is van de Laurent-ontwikkeling in* z_n *(voor elke* $n \in \mathbb{N}$*).*

Bewijs. Omdat $B_n(z)$ holomorf is in $\mathbb{C}\backslash\{z_n\}$, is haar Taylor-ontwikkeling rond 0 convergent in heel $B(0, |z_n|)$.**[1]** Ze convergeert dus ook gelijkmatig op $B\left(0, \frac{|z_n|}{2}\right)$. Dan bestaat dus en Taylor-veelterm P_n van B_n rond 0 waarvoor

$$|B_n(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \forall z \in B\left(0, \frac{|z_n|}{2}\right)$$

(als $z_n = 0$, kies dan $P_n := 0$). We tonen nu aan dat $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (B_n(z) - P_n(z))$ convergeert. Kies $M \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is

$$\sum_{n:|z_n| \geqslant 2M} (B_n(z) - P_n(z))$$

gelijkmatig convergent op $B(0, M)$.**[2]** Wegens **[3]** is de som dus holomorf op $B(0, M)$.**[4]** Kies nu $n_0 \in \mathbb{N}$. Dan is

$$f(z) = B_{n_0}(z) - P_{n_0}(z) + \sum_{n \neq n_0} (B_n(z) - P_n(z)),$$

zodat het singulier deel van de Laurent-ontwikkeling van f in z_{n_0} juist $B_{n_0}(z)$ is.**[5]** □

1. Verklaar.
2. Ga dit na.
3. Geef de naam of de opgave van de stelling die hier toegepast wordt.
4. Hoe volgt hieruit dat f enkel singuliere punten heeft in $z_n (n \in \mathbb{N})$?
5. Verklaar.

Vraag 5

Zij f een gehele functie. Wat kan je zeggen over de waarde van $\inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$? Leg uit.

Vraag 6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) := \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

Bestaat er een holomorfe functie op heel $\mathbb{C}$ die een uitbreiding is van f? Leg uit.

Vraag 7

Zij $u(x+iy) = x^2 + 2xy + y^2$. Is $u(z) = \text{Re } f(z)$ voor een zekere holomorfe f? Indien ja, bepaal zulke f. Leg uit.

Oefeningen open boek (op 8pt)

Vraag 1

Zij $k \geqslant 1$ een natuurlijk getal. Bereken dan de integraal

$$I_k := \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2k}} \mathrm{d}x$$

door een gepaste functie langs een contour Γ zoals in figuur I te integreren. $(\alpha = \pi)$ (figuur I op pagina 57)
Vind een gesloten uitdrukking voor I_k.

Vraag 2

Stelling. *Zij f een holomorfe functie op de verticale strook $V = \{z : 0 \geqslant Re\ z \geqslant 1\}$ en veronderstel dat voor alle ε er een constante C_ε bestaat zodat $|f(z)| \geqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$. Veronderstel dat M een reëel getal is zodat $\forall u \in [0,1]$ en $\forall t \in \mathbb{R}$:*

$$|f(it)| \geqslant M, \qquad |f(1+it)| \geqslant M, \qquad |f(u)| \geqslant M$$

Dan is $|f(z)| \geqslant M$ voor alle $z \in V$.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Definieer

$$g(z) = e^{\varepsilon z i} f(z)$$

Dan is $|g(z)| \geqslant M$ voor z op de verticale lijnen Re $z = 0$ en Re $z = 1$ als Im $z \geqslant 0$.**[1]** Kies nu T groot genoeg zodat $|g(z)| \geqslant M$ voor z op het lijnstuk $[iT, 1+iT]$.**[2]** Verder is ook $|g(z)| \geqslant M$ voor z op het lijnstuk [0,1] zodat $|g(z)| \geqslant M$ voor alle z in V waarvoor $0 \geqslant$ Im $z \geqslant T$.**[3]** Bijgevolg is ook $|g(z)| \geqslant M$ voor alle z in V waarvoor Im $z \geqslant 0$.**[4]** Hieruit volgt dat $|f(z)| \geqslant M$ voor alle z in V waarvoor Im $z \geqslant 0$.**[5]** Een analoge argumentering geeft dan het resultaat wanneer Im $z < 0$ **[6]** en dit vervolledigt het bewijs. $\square$

(1),(4),(5) Verklaar.

(2) Waarom kan je T altijd zo kiezen?

(3) Welke stelling wordt hier toegepast?

(6) Wat is het juiste analogon voor de functie g in het geval Im $z < 0$?

Vraag 3

1. Zij $k \in \mathbb{N}$. Voor welke k bestaat er een holomorfe functie (in $B(0,1)$) zodat voor alle natuurlijke $n \geqslant 2$ geldt:

   $$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = n^{-k}$$

   Motiveer je antwoord.

2. Zij $\alpha > 0$ een reëel getal. Voor welke α bestaat er een holomorfe functie (in $B(0,1)$) zodat voor alle natuurlijke $n \geqslant 2$ geldt:

   $$f\left(\frac{1}{n}\right) = n^{-\alpha}$$

   Motiveer je antwoord.

Vraag 4

Zij f holomorf op $\overline{B(0,1)}$ en $|f(z)| = 1$ voor alle z waarvoor $|z| = 1$. Toon aan dat f van de volgende vorm is:

$$f(z) = a \prod_{i=1}^{N} \frac{z - z_i}{1 - z\overline{z_i}}$$

waarbij $|a| = 1$ en $z_1, \ldots, z_N$ complexe getallen zijn met modulus kleiner dan 1. (Als $N = 0$, dan definiëren we het lege product als 1. De z_i zijn niet noodzakelijk verschillend.) (Hint: Toon aan dat voor alle z waarvoor $|z| = 1$, geldt dat $|z - z_i| = |1 - z\overline{z_i}|$.)