Discrete Wiskunde I 2018-2019

Theorie (voorbeeld, zie ook lijst met modelvragen)

Vraag 1 mondeling

Stelling. *Er bestaat een injectie maar geen bijectie van een verzameling naar zijn machtsverzameling*[1]*. D.w.z., voor elke verzameling A geldt*

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|^{[\mathbf{2}]}.$$

Bewijs. Een injectie is eenvoudig, neem bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathcal{P}(X) \\ x &\mapsto \{x\}, \end{aligned}$$

wat een injectie definieert wegens het axioma van extensionaliteit. Stel nu uit het ongerijmde[3] dat er een bijectie $h : X \to \mathcal{P}(X)$ bestaat. Beschouw de verzameling

$$Y = \{x \in X | x \notin h(x)\}.$$

Daar h een bijectie is, is er een unieke $y \in X$ waarvoor $h(y) = Y \in \mathcal{P}(X)$[4]. Maar dan is

$$\underline{y \notin h(y) \iff y \in Y \iff y \in h(y),}^{[\mathbf{5}]}$$

een strijdigheid. □

1. Geef de definitie van een machtsverzameling.
2. Geef een alternatief bewijs van deze uitspraak voor eindige A.
3. Wat wens je te bekomen als je een bewijs uit het ongerijmde toepast?
4. Verklaar deze uitspraak in detail.
5. Bespreek in detail.

Vraag 2

Geef en bewijs de volledige classificatie van alle cyclische groepen.

Vraag 3

Beschouw de homogene lineaire recurrente betrekking van de orde k met constante coëfficiënten

$$a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \cdots + \lambda_k a_{n-k}, n \geqslant k.$$

Wat zijn de karakteristieke oplossingen voor deze lineaire recurrente betrekking? Bewijs dat zij effectief oplossingen zijn voor deze lineaire recurrente betrekking.

Vraag 4

1. Waar of vals? Verklaar.
   De functie $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die een natuurlijk getal afbeeldt op zijn kwadraat is een multiplicatieve functie.

2. Zij $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Toon aan dat de elementen uit $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot)$ ofwel een eenheid ofwel een nuldeler is. Geef de voorwaarde waaraan een element moet voldoen om te beslissen of het een eenheid is ofwel een nuldeler is.

3. Waar of vals? Verklaar.
   Bestaat er een eindig veld met primitief element α zodat $\alpha^{40} = -1$?

4. Beschouw $X = \{1, \ldots, n\}$. Toon aan dat X precies $2^{n-1} - 1$ partities bezit die exact 2 klassen bezitten.

5. Waar of vals? Verklaar. P is een predikaat over $\mathbb{N}$.

$$(\forall x \in \mathbb{N})((x \neq x) \implies P(x))$$

Oefeningen

Vraag 1

1. Beschouw de cyclische groep $(C_{25}, \cdot)$. Welk polynoom is een deler van $x^{25} - 1$ en heeft precies alle elementen van orde 25 als nulpunten?

2. Los de kwadratische vergelijking $t^3x^2 + t^5x + t = 0$ op over het eindig veld $\mathbb{F}_{27}$, met primitief polynoom $t^3 - t + 1$ over $\mathbb{F}_3$.

Vraag 2

Los op.

$$\begin{cases} x^2 \equiv 4 \pmod{24} \\ x \equiv 18 \pmod{37} \\ (x-1)^3 \not\equiv 5 \pmod{8} \\ (x-1)^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Vraag 3

1. Zij $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}, a, c \neq 0 \right\}$. Toon aan dat $(G, \cdot)$ een deelgroep is van $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

2. Beschouw de deelgroep $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\}$ van G. Toon aan dat $(H, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$.

3. Geef een voorbeeld van een niet-triviale deelgroep van H.

4. Stel dat G een eindige groep is met $G = G_1 \times G_2$ met $\mathrm{ggd}(|G_1|, |G_2|) = 1$. Toon aan dat elke deelgroep H van G van de vorm $H = H_1 \times H_2$ is met $H_i \leqslant G_i (i = 1, 2)$.

Vraag 4

Stel $n \geqslant 2$ en beschouw een verzameling S van $n + 1$ natuurlijke getallen in het interval $[1, 2n]$.

1. Zij $n \geqslant 5$. Toon aan dat er in S twee getallen bestaan die een gemeenschappelijke priemfactor hebben.

2. Toon aan dat er in S twee getallen a_i en a_j bestaan met a_i een deler van a_j.

3. Toon aan dat er in S twee getallen bestaan die relatief priem zijn.