Statistiek I 2018-2019

Vraag 1

Zij $X_1, \ldots, X_n$ een reeks i.i.d. veranderlijken met verwachtingswaarde 0 en variantie σ^2. Zij $Y_1, \ldots, Y_n$ ook een reeks i.i.d. veranderlijken met verwachtingswaarde 0 en variantie σ^2 en de X_i's en Y_j's zijn onafhankelijk van elkaar. Beschouw dan de volgende paradox: $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ convergeert naar twee verschillende waarden:

Bew 1) We herschrijven de som tot de vorm $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)$. De Centrale Limietstelling zegt ons dat deze som van i.i.d. termen naar een normale verdeling convergeert met verwachtingswaarde 0 en variantie $\mathrm{Var}(X_i - Y_i) = 2\sigma^2$.

Bew 2) De som $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ convergeert dankzij de centrale limietstelling naar de $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ verdeling, en hetzelfde geldt voor de som $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Door het Lemma van Slutsky geldt dan dat het verschil $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ naar het verschil van twee $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ verdelingen convergeert en dit verschil is dus 0: de som convergeert in kans naar 0 (een constante).

Kan u de paradox oplossen en zeggen wat er aan de hand is?

Vraag 2

Zij $X \sim \chi_k^2 (k \in \mathbb{N}_0)$, toon aan dat

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} I(x \geqslant 0)$$

Vraag 3

De inzet voor een kansspel is gelijk aan 1 euro. Er wordt herhaaldelijk een munt opgeworpen die met kans p op munt belandt. Indien het resultaat van de worp gelijk is aan kop, dan wordt de munt opnieuw opgeworpen, anders niet. Voor elke uitgevoerde worp krijgt de speler een kraslotje. Noem X het aantal kraslotjes. Bij zo'n kraslotje heb je een kans q om 1 euro te winnen, anders win je niets. Noem Y het aantal euro dat men wint. Je krijgt n onafhankelijke observaties te zien waarvan zowel de uitkomsten van de muntworpen gekend zijn als het totale gewonnen bedrag.

1. Bepaal $E(X)$,$E(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$ en $\mathrm{Var}(Y)$.

2. Bepaal de momentenschatter voor p gebaseerd op de observaties van het aantal opgeworpen munten.

3. Bepaal de maximum likelihoodschatters $\hat{p}_{MLE}$ en $\hat{q}_{MLE}$ voor p en q.
4. Toon aan dat de maximum likelihoodschatters consistent zijn.
5. Bepaal de asymptotische distributie van $\sqrt{n}\,\hat{p}_{MLE}$ en $\sqrt{n}\,\hat{q}_{MLE}$.
6. Stel een asymptotisch 95% betrouwbaarheidsinterval op voor p.

Vraag 4

Stel dat we beschikken over twee onafhankelijke groepen van onafhankelijke gegevens, waarbij elke groep normaal verdeeld is. Noem deze groepen A (met observaties $X_1, X_2, \ldots, X_8$) en B (met observaties $Y_1, Y_2, \ldots, Y_7$). We bekomen steekproefgemiddelden $\bar{x}_8 = 8$ en $\bar{y}_7 = 10$ en als steekproefstandaarddeviaties $s_A = 5$ en $s_B = 6$.

1. Stel dat groep A in werkelijkheid verdeeld is volgens $\mathrm{N}(6, 16)$, bepaal dan een 95% referentie-interval voor het steekproefgemiddelde van groep A.
2. Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de variantie van groep B.
3. Test ofdat de varianties van de groepen gelijk zijn en vermeld de p-waarde van jouw test.
4. Stel dat je via de vorige deelvraag kan besluiten dat de varianties van de groepen gelijk zijn. Test dan ofdat het gemiddelde van groep A groter is dan het gemiddelde van groep B. Bereken tevens een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het verschil van de gemiddelden.
5. Bepaal het percentage type I fouten van deze test en het percentage type II fouten indien het verschil tussen de gemiddelden van groep A en groep B gelijk is aan 2. (Je mag veronderstellen dat de steekproefvarianties constant blijven onder herhaaldelijk trekkingen.)

Vraag 5

Zij (X, Y) uniform verdeeld over de cirkelschijf met middelpunt (0,0) en straal m, i.e. elk punt (x, y) met $x^2 + y^2 \leqslant M$ is even waarschijnlijk voor (X, Y). Zij (R, Θ) kansvariabelen zodat

$$\begin{cases} X = R\cos(\Theta) \\ Y = R\sin(\Theta) \end{cases}$$

met $R \in \mathbb{R}^+$ en $\Theta \in [0, 2\pi[$

1. Bepaal de gezamenlijke dichtheid van (R, Θ).
2. Zijn R en Θ onafhankelijk? Toon aan.
3. Bepaal $\mathrm{Var}(X)$.
4. Bepaal $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
5. Zijn X en Y onafhankelijk? Toon aan.

Vraag 6

Stel X uniform verdeeld over het interval $[-1, 1]$, Y een continue kansvariabele waarvoor geldt dat $\phi_Y(t) = \cos(t)$ en X en Y onafhankelijk. Bepaal dan de verdeling van $X + Y$.

Vraag 7

Beschouw een veld van m op n vakjes, er zijn dus m rijen en n kolommen $(m, n \geqslant 3)$. Op dit veld liggen k mijnen verspreid $(k \geqslant 8)$, in elk vakje kan maximaal 1 mijn liggen. We zijn geïnteresseerd in zogenaamde 'gevaarlijke' vakjes. Een vakje is gevaarlijk als er in het vakje zelf geen mijn ligt, maar in alle (8) omringende vakjes wel een mijn ligt. Aangezien vakjes op de rand geen 8 buren hebben, kunnen zij per definitie niet gevaarlijk zijn. Bepaal het verwachte aantal gevaarlijke vakjes. (Hint: Je hoeft de kansverdeling van het aantal gevaarlijke vakjes niet te kennen.)