Examen Statistische Fysica I: 21 januari 2019

THEORIE (30 punten)

(10 punten voor onderstaande vraag, 20 punten voor het mondeling examen)

Bezettingswaarschijnlijkheden

Beschouw de volgende uitdrukking voor de bezettingswaarschijnlijkheden:

$$\overline{n_a} = \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_a - \mu) \pm 1}$$

T1a(1pt): Specifieer heel duidelijk de fysische omstandigheden waaronder de bovenstaande uitdrukking voor $\overline{n_a}$ geldig is. In dit verband: geef duidelijk de betekenis van de symbolen ϵ_a en μ.

T1b(2pt): Wat leert bovenstaande uitdrukking voor $\overline{n_a}$ over het teken, de grootte, en de temperatuursafhankelijkheid van de grootheid μ?

T1c(3pt): Start van bovenstaande uitdrukking voor $\overline{n_a}$ om de ééndeeltjespartitiefunctie $Z_1(T, V)$ voor de translationele beweging van massieve deeltjes ($m \neq 0$) in het "klassiek" en "niet-relativistisch" regime af te leiden.

T1d(4pt): Start van bovenstaande formule voor $\overline{n_a}$ om een uitdrukking af te leiden voor de magnetisatiedichtheid $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{M}}{V}$ van een systeem van N conductie-elektronen in een metaal die bij kamertemperatuur onder de invloed gebracht worden van een extern magnetisch veld $\vec{\mathcal{B}}$ ("Pauli paramagnetisme"). De uitdrukking die je finaal kunt bekomen is van de vorm

$$\mathcal{P} \approx (2m_e)^{3/2} \sqrt{\epsilon_F} \frac{4\mu_B^2 \mathcal{B} \pi}{h^3} .$$

Je kunt bij je berekeningen eventueel gebruik maken van:

1. Dichtheid der impulstoestanden: $f(p) = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$; $f(\epsilon) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon}$.

2. Gaussische Integralen:

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}$$

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen enkel gebruikt worden:
  1. de cursusnota's
  2. (eventueel) de transparanten die de lessen begeleiden
  3. (eventueel) Appendix A (Physical Constants and Mathematical Relations) uit het boek Harvey Gould and Jan Tobochnik "Statistical and Thermal Physics"
- Het is niet toegelaten om gebruik te maken van andere hulpmiddelen, zoals bijvoorbeeld sets van opgeloste oefeningen.

Oefening 1 (10 punten): Deeltjes met een magnetisch moment die bewegen op een oppervlak

Beschouw een gas van N spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes met massa $m \neq 0$ die bewegen **op een oppervlak** A en in contact staan met een warmtebad op temperatuur T. Elk van de deeltjes $i = 1, 2, \ldots, N$ kan beschreven worden door een hamiltoniaan van het type

$$H^{(1)}(i) = \frac{p_i^2}{2m} - \mu_B s_z(i)\mathcal{B} \, ,$$

waarbij $\mu_B(> 0) = \left|\frac{e\hbar}{2m}\right|$, $s_z(i) \in \left\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\}$ en $\mathcal{B}$ de grootte van een extern magnetisch veld dat volgens de positieve z-as wordt aangelegd. De totale hamiltoniaan $H^{(N)}$ van het systeem van N deeltjes wordt gegeven door

$$H^{(N)}(1, 2, \ldots, N) = \sum_{i=1}^{i=N} H^{(1)}(i) \; .$$

We beschouwen condities waarbij de thermische golflengte van de Fermionen véél kleiner is dan de gemiddelde separatie tussen de deeltjes zodat het systeem aan de voorwaarden van een "klassiek gas" voldoet.

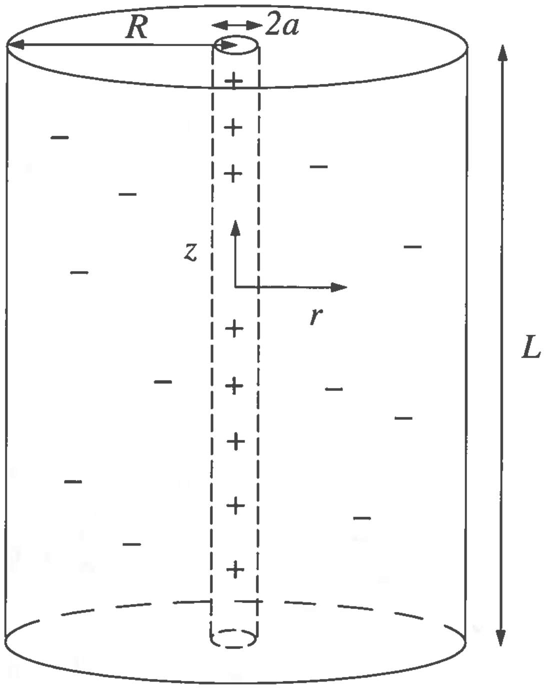
O1a(4pt): Bereken de vrije energie $F(T, A, N, \mathcal{B})$ van het totaal systeem.

O1b(3pt): Bereken de gemiddelde energie $\overline{E}(T, A, N, \mathcal{B})$ van het totaal systeem en toon daarbij aan dat het bestaat uit een som van een "kinetisch" en een "magnetisch" gedeelte. Toon aan dat de "kinetische" en "magnetische" gedeelten van de limieten $\lim_{T\to 0} \overline{E}$ en $\lim_{T\to\infty} \overline{E}$ voldoen aan wat je op basis van fysisch inzicht zou verwachten.

O1c(1pt): Bereken de druk in het systeem.

O1d(2pt): Bereken de fugaciteit z van het systeem. Toon aan dat je resultaat compatibel is met het feit dat het systeem zich in een klassiek regime bevindt.

OEFENING 2 (10 PUNTEN): IONISCHE POLYMEREN



Wanneer ionische polymeren (zoals DNA) opgelost worden in water dan gebeurt het volgende. Negatief geladen contra-ionen (met lading $-q$) splitsen zich af van het polymeer en vormen een oplossing met het water. De positief geladen resten (met lading $+q$) van de polymeren lossen niet op in het water en gaan door de elektrostatistische wisselwerking een staaf van positief geladen ionen gaan vormen (zie figuur).

Noem N het aantal negatief geladen contra-ionen. De contra-ionen interageren met de N positieve ionen in de staaf via een interactiepotentiaal gegeven door

$$U(r) = -\frac{2qN}{L} \ln \frac{r}{L} \,,$$

met r de radiale coördinaat in de cylindrische geometrie (zie figuur). Dit betekent dat de netto interactie tussen de contra-ionen en de positieve ionen loodrecht staat op de positief geladen staaf.

Wanneer de Coulomb repulsie wordt verwaarloosd, dan kan het systeem van N negatief-geladen contra-ionen benaderend beschreven worden door de volgende hamiltoniaan:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_i}{2m} \; + \; 2q^2 \frac{N}{L} \ln\left(\frac{r_i}{L}\right) \right] \;.$$

Bij het oplossen van de hiernavolgende vragen mag je veronderstellen dat het aantal contra-ionen N constant is en dat aan alle voorwaarden voldaan is opdat het totaal systeem zich in het "klassiek regime" zou bevinden. We veronderstellen verder dat het systeem zich bevindt in een cylindrisch volume (zie figuur).

O2a(3pt): Bereken de canonische vrije energie van het systeem van N contra-ionen als functie van T, $\frac{N}{L}$ en de stralen a en R (zie figuur).

O2b(2pt): Bereken de waarschijnlijkheidsdistributie $p(r)$ voor de radiële positie van de deeltjes. Zorg ervoor dat

$$\int_{r=a}^{r=R} p(r)dr = 1 \ .$$

O2c(2pt): Bereken $\langle r \rangle$ (de gemiddelde radiële positie van de contra-ionen). Maak een schets van $\langle r \rangle$ tegen een goed gekozen dimensieloze grootheid (je kunt hierbij veronderstellen dat $R \gg a$, zodat $\frac{a}{R} \approx 0$.) Wat is het gedrag van de berekende $\langle r \rangle$ in de limiet van "hoge" en "lage" temperaturen? Leg het resultaat bij deze twee limietsituaties uit op basis van je fysisch inzicht in het beschouwde systeem. Bij welke temperaturen is er een kanteling tussen het "hoge-temperatuur" en "lage-temperatuur" regime? Is dit in de lijn van je verwachtingen? Leg uit.

O2d(3pt): Bereken de druk van de contra-ionen op de wand van de cylinder als een functie van de temperatuur. Je kunt ook hierbij veronderstellen dat $R \gg a$. Hoe reflecteert de transitie besproken in deelvraag O2c (hierboven) zich op de druk in het systeem?