Oefeningen Banachruimten en Banachalgebra's

1. Zij X, Y genormeerde ruimten en $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Toon aan:
   (a) $\operatorname{Ker} T = {}^{\perp}(T^*(Y^*))$
   (b) $\overline{T^*(Y^*)} \subseteq (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$
   (c) Als X reflexief is, dan is $\overline{T^*(Y^*)} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

2. Zij $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue afbeeldingen, $\forall n \in \mathbb{N}$ en $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat $N \in \mathbb{N}$ bestaat en een niet-lege open bal $B \subseteq \mathbb{R}$ waarvoor

   $$(\forall x \in B)(\forall n \geq N)(|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

   (b) Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat

   $$\{x \in \mathbb{R} : (\exists \delta > 0)(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\}$$

   een open, dichte deelverzameling bevat.
   (c) Toon aan dat de verzameling van alle continuïteitspunten van f dicht is.

3. Zij $\mathcal{A}$ een Banachalgebra en $\mathcal{B}$ een dichte deelalgebra (met 1) van $\mathcal{A}$. Toon aan dat $(\widehat{\mathcal{A}}, \tau_{\Pi})$ homeomorf is met $(\widehat{\mathcal{B}}, \tau_{\Pi})$.

4. Zij $\mathcal{A}$ een C^*-algebra en $u \in \mathcal{A}$ inverteerbaar met $\|u\| \leq 1$ en $\|u^{-1}\| \leq 1$.
   (a) Wat kan je zeggen over $\operatorname{sp}(u^* u)$?
   (b) Toon aan dat u unitair is (d.w.z., $u^{-1} = u^*$).

Theorie Banachruimten en Banachalgebra's

1. (a) Formuleer de stelling van Baire in complete metrische ruimten. (Geen bewijs.)
   (b) Schets hoe de stelling van Baire gebruikt wordt om een aantal belangrijke stellingen in de theorie van de Banachruimten te bewijzen. (Geen details bewijzen.)

2. (a) Definieer de Gelfand-transformatie Γ van een Banachalgebra. Welke structuur (algebraïsch, metrisch, topologisch, ...) bewaart Γ? (Geen bewijzen.)
   (b) Schets hoe de Gelfand-transformatie van een commutatieve C^*-algebra een isometrische inbedding is. (Geen bewijzen.)

3. Zij X een genormeerde ruimte, $Y \leq X$ gesloten en $x \in X \setminus Y$. Toon aan dat $\varphi \in X^*$ bestaat met $\varphi(x) \neq 0$ en $\varphi = 0$ op Y.

4. Beantwoord de vragen:

Eigenschap 1. *Zij K een compacte topologische ruimte en zij $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. Dan is $\widehat{\mathcal{A}} = \{\delta_x : x \in K\}$ en $\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \overset{\max}{\lhd} \mathcal{A}\} = \{\mathfrak{M}_x : x \in K\}$, waarbij*

$$\delta_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : \delta_x(f) = f(x) \qquad \text{en} \qquad \mathfrak{M}_x := \{f \in \mathcal{A} : f(x) = 0\}.$$

$\mathcal{A}$ is semi-enkelvoudig. [1]

Bewijs. $\{\delta_x : x \in K\} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ volgt door directe controle. Veronderstel nu dat $\varphi \in \widehat{\mathcal{A}} \setminus \{\delta_x : x \in K\}$. Dan bestaat voor elke $x \in K$ een $f \in \mathcal{A}$ met de eigenschap dat $\varphi(f) \neq f(x)$. Z.v.v.a. is $\varphi(f) = 0 \neq f(x)$ en is $f \geq 0$ [2]. Dan bestaat ook een open omgeving U_x van x zo dat $f(y) > 0$ voor elke $y \in U_x$. Omdat K compact is, bestaan $x_1, \ldots, x_N \in K$ zo dat $K = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_N}$. Noem f_j het bijhorende element van $\mathcal{A}$ (met dus $\varphi(f_j) = 0$ en $f_j(y) > 0$ voor elke $y \in U_{x_j}$). Dan is $g := \sum_{j=1}^{N} f_j$ inverteerbaar [3] in $\mathcal{A}$, zodat $\varphi(g) \neq 0$ [4], een strijdigheid [5].
De vorm van de maximale idealen volgt dan omdat … [6]. □

[1-5]: verklaar het onderlijnde.
[6]: vul aan.

Stelling 2. *Zij X en K compacte Hausdorff-ruimten. Als $\Phi\colon \mathcal{C}(K, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ een algebra-morfisme is, dan bestaat $F \in \mathcal{C}(X, K)$ waarvoor*

$$\Phi(f) = f \circ F, \quad \forall f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C}).$$

Bewijs. Zij $x \in X$. Dan is $\delta_x \circ \Phi \in \widehat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} := \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. Bijgevolg bestaat $F(x) \in K$ zo dat $\delta_x \circ \Phi = \delta_{F(x)}$. We hebben op die manier een afbeelding $F\colon X \to K$ geconstrueerd waarvoor $\Phi(f) = f \circ F$ voor elke $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ [7].
Noem $\mathcal{B} := \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Dan is

$$\Phi^* : \widehat{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathcal{A}} : \Phi^*(\varphi) := \varphi \circ \Phi$$

continu (voor τ_{II}) [8]. Omdat het diagram

$$\begin{tikzcd} \delta_x \arrow[r, "\Phi^*"] & \delta_x \circ \Phi \\ x \in X \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "F"] & F(x) \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

commuteert [9], is F dat ook [10]. □

Examen Banachruimten en Banachalgebra's 2018-2019 eerste zit
Professor Hans Vernaeve