Differentiaalmeetkunde I
Examen – 24.6.2019

Theorie (gesloten boek)

1. (a) Wanneer noemt men een deelverzameling N van een n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-variëteit M een k-dimensionale (reguliere) deelvariëteit? Beschouw een afbeelding $f : \Omega \to \mathbb{R}$ van klasse $\mathcal{C}^\infty$ op een open verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Bewijs dat $N = \{(x,y,z) \in \Omega : f(x,y,z) = 0\}$ een 2-dimensionale deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$ is als $\nabla f(x,y,z) \neq \mathbf{0}$ voor alle $(x,y,z) \in N$.

   (b) Geef een expliciete $\mathcal{C}^\infty$-atlas van $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (toon aan dat uw atlas inderdaad een $\mathcal{C}^\infty$-atlas is).

   (c) Wanneer noemt men een afbeelding tussen twee $\mathcal{C}^\infty$-variëteiten glad? Zij $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ een oppervlak met $\boldsymbol{\sigma}$ van klasse $\mathcal{C}^\infty$ en met meetkundig oppervlak Σ (en beschouw Σ als een 2-dimensionale deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$). Definieer de Gaussafbeelding $\mathbf{G} : \Sigma \to S^2$ als het eenheidsnormaalvectorveld, m.a.w.

$$\mathbf{G}(P_0) = \mathbf{N}(q_0^1, q_0^2) = \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2)(q_0^1, q_0^2)}{\|(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2)(q_0^1, q_0^2)\|}$$

   waarbij $P_0 = \boldsymbol{\sigma}(q_0^1, q_0^2)$. Toon aan dat de Gaussafbeelding glad is.

2. Beschouw een oppervlak $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$, $(q_1, q_2) \mapsto \boldsymbol{\sigma}(q_1, q_2)$ met meetkundig oppervlak Σ. Noteer de eenheidsnormaalvector van het oppervlak met $\mathbf{N}(q^1, q^2)$. De tweede grondvorm $\mathrm{II}_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \to \mathbb{R}$ in $P \in \Sigma$ werd gedefinieerd als de bilineaire vorm met matrixvoorstelling $L_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \cdot \mathbf{N}$ ten opzichte van de basis $(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)$ van $T_P\Sigma$. De Weingartenafbeelding $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ is de lineaire afbeelding die voldoet aan $L_P(\boldsymbol{\sigma}_i) = -\mathbf{N}_i$, $i = 1, 2$.

   (a) Voor vectoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P\Sigma$, geef en bewijs een formule voor $\mathrm{II}_P(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ in termen van de Weingartenafbeelding.

   (b) Wanneer noemt men een punt P van een oppervlak een umbilicaalpunt? Toon aan dat een oppervlak $\boldsymbol{\sigma}$ met enkel umbilicaalpunten ofwel een (deel van een) vlak, ofwel een (deel van een) boloppervlak is.

Oefeningen (open boek)

1. In deze oefening bewijzen we de formule van Enneper, die een verband geeft tussen de Gausskromming van een oppervlak en de torsie van een asymptotische lijn op dat oppervlak. Zij $\boldsymbol{\sigma}$ een oppervlak met meetkundig oppervlak Σ, Gausskromming K en gemiddelde kromming H. Zij P een punt op Σ en noteer de eerste en tweede grondvorm en de Weingartenafbeelding in P als respectievelijk I_P, II_P en L_P.

   (a) Toon aan dat voor alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P\Sigma$ geldt dat
   $$L_P(L_P(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{w} - 2H\,\mathrm{II}_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + K\,\mathrm{I}_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0.$$
   (Hint: Gebruik de stelling van Cayley-Hamilton: een lineaire operator voldoet aan haar karakteristieke vergelijking.)

   (b) Zij nu $\mathbf{c}(s) = \boldsymbol{\sigma}(u_1(s), u_2(s))$ een kromme op het oppervlak, met booglengte als parameter. Toon aan dat
   $$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}s}(u_1(s), u_2(s)) = -L_P(\mathbf{t}(s)), \quad \text{met } \mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s), P = \boldsymbol{\sigma}(u_1(s), u_2(s)).$$

   (c) Stel nu dat Σ enkel hyperbolische punten heeft en dat $\mathbf{c}$ een asymptotische lijn is waarvan de kromming nooit nul wordt. Gebruik (a) en (b) om aan te tonen dat
   $$\tau^2(s) = -K(u_1(s), u_2(s)), \quad \text{met } \tau \text{ de torsie van } \mathbf{c}.$$
   (Hint: gebruik de formules van Frenet om τ^2 uit te drukken in termen van de Frenet basis.)

2. Beschouw het oppervlak bepaald door $\boldsymbol{\sigma}(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, \ln u_1)$, $u_1 \in]0, +\infty]$, $u_2 \in]0, 2\pi[$.

   (a) Bepaal de coëfficiënten van de eerste en de tweede grondvorm en bereken de Gausskromming in elk punt.

   (b) Toon aan dat de asymptotische lijnen gegeven worden door $u_2 = \pm \ln u_1 + c$ met c een willekeurige constante.

   (c) Bereken de torsie van de asymptotische lijn $\mathbf{c}(t) = (t\cos(\ln t), t\sin(\ln t), \ln t)$, $t \in]0, +\infty[$ (met dus $u_1(t) = t, u_2(t) = \ln t$.) Doe dit rechtstreeks, je mag de vorige oefening enkel gebruiken om je resultaat te controleren.