Oefening 1 (5 punten). Zij $\mathcal{C}$ een lokaal eindige categorie. Zij f en g morfismen van A naar B, met $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Beschouw de contravariante functor $F_{f,g}$ van $\mathcal{C}$ naar **Set** gedefinieerd door

$$F_{f,g}(C) = \{h : C \to A \mid hf = hg\}$$

met $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ willekeurig.

Veronderstel dat $F_{f,g}$ gerepresenteerd wordt door E. Zij $e \in F_{f,g}(E)$ het unieke element corresponderend met het natuurlijke isomorfisme tussen $F_{f,g}$ en $\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, E)$, zoals beschreven in (de duale versie van) het Yoneda Lemma. We noemen het paar (E, e) een *equalizer* (van het paar f, g).

Beschouw $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$. We noemen een morfisme $e : A \to B$ een *monomorfisme* indien $fe = ge$ impliceert dat $f = g$, voor elk object C en elke twee morfismen $f, g : C \to A$.

(i) Ga na dat $F_{f,g}$ inderdaad een (contravariante) functor is. (1 punt)

(ii) Toon aan dat een object E en een element $e \in F_{f,g}(E)$ een equalizer vormen als en slechts als voor elk object C elke $h \in F_{f,g}(C)$ uniek factoriseert als ke, met $k : C \to E$. (1 punt)

(iii) Beschouw een afbeelding $e : E \to A$ in $\mathcal{C} =$ **Set**. Toon aan dat e een monomorfisme is als en slechts als het injectief is als en slechts als (E, e) de equalizer van een paar van morfismen is. (1,5 punten)

(iv) Beschouw $\mathcal{C} =$ **Mon**, de categorie van monoïden, en beschouw een object E en een morfisme $e : E \to A$. Is e een monomorfisme als en slechts als (E, e) de equalizer van een paar van morfismen is? Indien niet, construeer een tegenvoorbeeld. (1,5 punten)

Oefening 2 (8 punten). Zij G een lineaire algebraïsche groep over k. Stel

$$\begin{aligned} Z(G)(R) = \{g \in G(R) \mid\ & G(\alpha)(g)^{-1} h G(\alpha)(g) = h, \\ & \text{voor alle } k\text{-algebras } S, \text{ alle morfismen } \alpha : R \to S, \text{ en alle } h \in G(S)\}. \end{aligned}$$

(i) Bereken $\ker(\text{Ad})$ voor $G = \text{GL}_n$. (1 punt)

(ii) Veronderstel $\text{char}(k) = p$. Zij H de lineaire algebraïsche groep over k zó dat $H(R)$ bestaat uit de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & & \\ & u^p & a \\ & & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in R^\times, a \in R \right\}.$$

Bepaal $\ker(\text{Ad})$ en $Z(H)$. (1,5 punten)

(iii) Concludeer dat H een gladde groep met niet-glad centrum is en dat $Z(H) \subsetneq \ker(\text{Ad}) \subsetneq H$ geldt. (1 punt)

(iv) Toon aan dat het centrum van een bijna enkelvoudige lineaire algebraïsche groep over een algebraïsch gesloten veld gelijk is aan $\ker(\mathrm{Ad})$. (*Hint:* Maak een onderscheid tussen het geval $\ker(\mathrm{Ad}) = G$ en het geval $\ker(\mathrm{Ad}) \neq G$.) (2 punten)

(v) Beschouw een semisimpele lineaire algebraïsche groep over een algebraïsch gesloten veld zodat $\ker(\mathrm{Ad})$ glad en samenhangend is. Toon aan dat het centrum van G gelijk is aan $\ker(\mathrm{Ad})$. (1 punt)

(vi) Geef een voorbeeld van een gladde reductieve groep met niet-glad centrum. (Het is *niet* nodig om reductiviteit aan te tonen.) (1,5 punten)

Oefening 3 (7 punten). Deze oefening betreft twee uitspraken over $\mathbf{G}_a$. (*Hint:* sommige antwoorden kunnen afhangen van de karakteristiek.)

(i) Bepaal alle endomorfismen van $\mathbf{G}_a$. (3,5 punten)

(ii) Toon aan dat elke unipotente lineaire algebraïsche groep U over een algebraïsch gesloten veld van karakteristiek nul met $\dim(Z(U)) > 0$ een normaaldeler isomorf met $\mathbf{G}_a$ heeft. (3,5 punten)