Complexe Analyse 2018-2019 2e zit

Theorie

Vraag 1

Formuleer (geef de opgave) en bewijs de integraalformule van Cauchy voor machtreeksen.

Vraag 2

Toon aan dat elke veelterm met complexe coëfficiënten een complex nulpunt heeft.

Vraag 3

Hulpstelling 1 (2.3.9 op pagina 56)**.** *Zij z_0 een enkelvoudige pool van $f(z)$ en Γ_r een in tegenwijzerzin doorlopen boog, met middelpuntshoek φ, van de cirkel $|z - z_0| = r$. Dan is*

$$\lim_{r \to 0+} \int_{\Gamma_r} f(z) \mathrm{d}z = \varphi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Bewijs. Voor $0 < |z - z_0| < R$ is

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + A(z),$$

met $A(z)$ holomorf in de schijf $|z - z_0| \leqslant R$ (zekere $R > 0$) **[1]**. Daardoor is voor $0 < r < R$

$$\int_{\Gamma_r} f(z) \mathrm{d}z = a_{-1} \int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{\Gamma_r} A(z) \mathrm{d}z.$$

We hebben

$$\int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \overset{\textbf{[2]}}{=} i\varphi \qquad \text{en} \qquad \int_{\Gamma_r} A(z) \mathrm{d}z \overset{\textbf{[3]}}{\leqslant} M 2\pi r \to 0 \quad \text{als } r \to 0+$$

waarbij $M = \max\limits_{|z - z_0| \leqslant R} |A(z)|$. **[4]** □

1. Waarom geldt deze ontbinding voor f?
2. Verklaar de gelijkheid.
3. Verklaar de ongelijkheid.
4. Hoe volgt het gevraagde hieruit?

Vraag 4

Stelling 1 (3.2.10 op pagina 76)**.** *Zij f holomorf in z_0 met $0 < \operatorname*{mult}_{z=z_0} f(z) =: m < \infty$. Dan bestaat voor elke voldoende kleine $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ met de eigenschap dat f in $B(z_0, \varepsilon)$ de waarde c juist m keer bereikt, voor elke $c \in B'(0, \delta)$.*

Bewijs. Omdat $m < \infty$, is z_0 een geïsoleerd nulpunt **[1]**. We kunnen dus $\varepsilon_0 > 0$ vinden zo dat f op $B(z_0, \varepsilon_0)$ holomorf is en geen nulpunten heeft op $B'(z_0, \varepsilon_0)$. Zij willekeurig $\varepsilon < \varepsilon_0$. Omdat f continu is op $\Gamma := \partial B(z_0, \varepsilon)$ **[2]**, is $\delta := \min_{z \in \Gamma} |f(z)| > 0$ **[3]**. Voor elke $z \in \Gamma$ en elke $c \in \mathbb{C}$ met $|c| < \delta$ is dan

$$|f(z) - (f(z) - c)| = |c| < \delta \leqslant |f(z)|.$$

Dan is het aantal nulpunten van $f(z) - c$ in $B(z_0, \epsilon)$ gelijk aan het aantal nulpunten van f in $B(z_0, \epsilon)$ (geteld volgens multipliciteit) **[4]**. Als $m = 1$, dan volgt de stelling onmiddellijk **[5]**. Is $m > 1$, dan kiezen we ε_0 (door desnoods ε_0 te verkleinen) zo dat ook f' geen nulpunten heeft op $B'(z_0, \varepsilon_0)$ **[6]**. Dan heeft $f(z) - c$ juist m verschillende nulpunten in $B(z_0, \varepsilon_0)$ als $c \neq 0$ **[7]**. □

1. Geef de definitie van multipliciteit en leg uit waarom z_0 een geïsoleerd nulpunt is.
2. Waarom is f hier continu?
3. Verklaar de ongelijkheid.
4. Waarom geldt dit?
5. Hoe volgt de stelling uit $m = 1$? Waarom volgt de stelling niet onmiddelijk uit $m > 1$?
6. Waarom kunnen we zo'n ε_0 kiezen?
7. Verklaar.

Vraag 5

Zij f holomorf op heel $\mathbb{C}$ en $z_0 \in \mathbb{C}$. Op welk deel van $\mathbb{C}$ is de functie $z \mapsto \int_{z_0}^{z} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta$ dan continu? Leg uit.

Vraag 6

Noem f antiholomorf op $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ als f van klasse C_1 is op Ω en $\partial_x f(z) = i \partial_y f(z)$ op Ω. Op welk deel van $\mathbb{C}$ is dan

a) $g(z) := f(\overline{z})$

b) $h(z) := \overline{f(z)}$

holomorf? Is dan $\int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z := \int_\Gamma (u + iv)(x + iy)(\mathrm{d}x - i \mathrm{d}y) = 0$ voor elke eenvoudige Γ met $[\Gamma] \subseteq \Omega$? Leg uit.

Vraag 7

Zij f holomorf in $B(0,r)$ met $f(0) = 0$. Kan het voorvallen dat $\operatorname{Re} f \leqslant 0$ voor elke $z \in B(0,r)$? Leg uit.

Oefeningen

Vraag 1

Bereken de integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$$

door een gepaste functie langs een contour Γ zoals in figuur I (pagina 57) te integreren ($\alpha = \pi$).

Vraag 2

Stelling 2. *Er bestaat geen holomorfe bijectie van* $B'(0,1) = B(0,1) \setminus \{0\}$ *naar* $B(0,1)$.

Bewijs. Stel dat f een holomorfe bijectie is van $B'(0,1)$ naar $B(0,1)$. Omdat $\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$ [**1**], is 0 een ophefbaar singulier punt van f [**2**]. We kunnen f dus uitbreiden tot een holomorfe afbeelding gedefinieerd op $B(0,1)$ die we als g zullen noteren. Stel eerst dat $|g(0)| = 1$. Dan volgt uit ... [**3**] dat g constant is en bijgevolg kan f niet bijectief zijn, een tegenstrijdigheid. We mogen dus veronderstellen dat $|g(0)| < 1$ [**4**]. Er bestaat dus een β waarvoor $0 < |\beta| < 1$ en $f(\beta) = g(0) = g(\beta)$ [**5**]. Zij $\varepsilon < \frac{|\beta|}{2}$. Dan is $f(B(\beta, \varepsilon))$ een omgeving van $f(\beta)$ [**6**]. Maar dan is $\lim_{z \to 0} f(z) \neq f(\beta)$ [**7**], een tegenstrijdigheid [**8**]. Bijgevolg bestaat er geen holomorfe bijectie van $B'(0,1)$ naar $B(0,1)$. □

1) 2) 5) 6) 7) Verklaar.

3) Vul aan.

4) Waarom kan $|g(0)| > 1$ niet?

8) Waarom is dit een tegenstrijdigheid?

Vraag 3

Toon aan dat er geen gehele functie bestaat waarvoor

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{3n-2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vraag 4

a) Zij f holomorf op $\overline{B}(0,1)$ en $\operatorname{Re} f = 0$ voor $|z| = 1$. Toon aan dat f constant is.

b) Zij M een willekeurig reëel getal. Moet f ook constant zijn als $\operatorname{Re} f = M$? Toon aan of weerleg met een tegenvoorbeeld.

c) Moet f ook constant zijn als $\operatorname{Re} f \leqslant 0$? Toon aan of weerleg met een tegenvoorbeeld.