

Inleiding tot de theoretische fysica 2018-2019 2e zit

Theorie

Vraag 1

Toon aan dat de arbeid verricht door de krachten op de deeltjes tussen twee punten van het configuratiepad gelijk is aan het verschil in totale kinetische energie tussen deze twee punten.

Vraag 2

Toon aan dat de Lagrangiaan niet-uniek is, met andere woorden dat de Lagrangevergelijkingen invariant zijn als een totale tijdsafgeleide van een functie van de coördinaten en de tijd bij de Lagrangiaan wordt opgeteld.

Vraag 3

Toon aan, via behoud van zowel energie als draaimoment, dat de bewegingsvergelijking voor een deeltje in een conservatief krachtveld gereduceerd kan worden tot een 1ste orde differentiaalvergelijking. Geef ook een formele oplossing.

Vraag 4

Leid de normaaltrillingsvergelijking af voor een conservatief systeem met holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen (beschreven door een Lagrangiaan met n veralgemeende coördinaten), voor kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwicht.

Oefeningen

Vraag 1

Werk in het verticale vlak (dus 2 dimensies). Een eerste massa m_1 kan vrij bewegen op een parabool met vergelijking $y = ax^2$. Aan deze massa hangt een tweede massa m_2 verbonden met een massaloze staaf met lengte l . Op de twee massa's werkt de zwaartekracht in.

- Hoeveel veralgemeende coördinaten heb je nodig? Waarom? Kies veralgemeende coördinaten.
- Stel de kinetische en de potentiële energie op.
- Bepaal de stabiele evenwichtspunten.
- Bepaal de frequentie van de (kleine) normaaltrillingen.

Vraag 2

Neem twee massa's m_1 en m_2 verbonden door een touw met lengte l_t . Massa 1 is gebonden om wrijvingsloos te bewegen op een horizontaal vlak. In dat vlak zit een klein gaatje, waardoor het touwtje, dat de massa's verbindt, loopt. Tussen het gaatje en massa 1 is een veer gespannen met rustlengte l_c en veerconstante k . Onder het vlak hangt massa 2 die onderhevig is aan de zwaartekracht en enkel verticaal kan bewegen. Het touw blijft strak gedurende de beweging. De veerconstante en rustlengte zijn zo gekozen dat $m_2g = kl_v$.

- a Zoek geschikte veralgemeende coördinaten (tip: laat je inspireren door cilindercoördinaten).
- b Stel de kinetische en de potentiële energie op (tip: vereenvoudig de potentiële energie met de gegeven gelijkheid).
- c Stel de Lagrangiaan en de Lagrangevergelijkingen op.
- d Zoon aan dat er nog een eerste integraal van de beweging is. Wat is de fysische interpretatie? (Noem deze integraal l). Gebruik dit om het probleem te herleiden tot een eendimensionaal probleem met effectieve potentiaal.
- e Schets deze effectieve potentiaal. Is er een oplossing mogelijk met een cirkelvormige beweging van deeltje 1 in het vlak?
- f Bepaal de straal r_0 van deze beweging? Is de beweging stabiel?