Oefeningenexamen relativiteitstheorie

Augustus 2019

Speciale relativiteit

Oefening 1 (1,5 punten)

Toon aan dat het kinematisch onmogelijk is voor een foton om te vervallen in een electron-positron paar.

Oefening 2 (3,5 punten)

Een deeltje met massa m botst elastisch met een stationair deeltje met dezelfde massa. Het inkomende deeltje heeft een kinetische energie T_0. Wat is de kinetische energie T_0' van dit deeltje na de botsing als de verstrooiingshoek θ is?

Algemene relativiteit

Oefening 3 (5 punten)

a) Een satelliet beschrijft een cirkelvormige geodeet met straal r_e rond een Schwarzschild zwart gat en zendt hierbij fotonen uit met een constante frequentie ν_e in alle richtingen. Een stationaire waarnemer op een verdere afstand r_o bevindt zich in het rotatievlak en observeert de fotonen strikt volgens de radiale richting. Bereken de roodverschuiving waarmee deze waarnemer het licht van de satelliet ziet.

b) Neem de limieten $r_e \to \infty$, $r_o \to R_S$ en $r_e \to R_S$ (afzonderlijk) van de uitdrukking voor de roodverschuiving die je in a) hebt gevonden en bespreek de fysische betekenis van deze limieten. De limiet $r_e \to R_S$ geeft geen zinnig antwoord, wat is de fysische reden hiervoor?

Oefening 1

$p_\gamma = p_{e^-} + p_{e^+}$ (behoud van 4-impuls)

$\Rightarrow 0 = 2 m_e^2 c^2 + 2\, p_{e^-} \cdot p_{e^+}$

$\Rightarrow m^2 c^2 = - p_{e^-} \cdot p_{e^+}$

$p_{e^-} = \gamma_1 (m_e c, m_e \vec{v}_1)$

$p_{e^+} = \gamma_2 (m_e c, m_e \vec{v}_2)$

$p_{e^-} \cdot p_{e^+} = \gamma_1 \gamma_2 m_e^2 (\underbrace{c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}_{>0})$

$\Rightarrow \underbrace{m^2 c^2}_{>0} \neq \underbrace{- p_{e^-} \cdot p_{e^+}}_{<0}$

Alternatief:

werk in rustselsel van e^-

$p_{e^-} = (mc, \vec{0})$

$\Rightarrow p_{e^-} \cdot p_{e^+} = mc\, p^0_{e^+} > 0$

Oefening 2.

$$p_1 = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0\right) \qquad \gamma mc^2 = E = mc^2 + T_0$$

$$p_2 = (mc, 0, 0, 0)$$

$$p_1' = \left(\frac{E'}{c}, p'\cos\vartheta, p'\sin\vartheta, 0\right) \qquad E' = mc^2 + T_0'$$

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$p_1 + p_2 - p_1' = p_2'$$

$$3m^2c^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_1' - 2p_2p_1' = m^2c^2$$

$$m^2c^2 + Em - \frac{EE'}{c^2} + pp'\cos\vartheta - E'm = 0$$

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}$$

$$p' = \sqrt{\frac{E'^2}{c^2} - m^2c^2}$$

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right)\left(mc - \frac{E'}{c}\right) + \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}\sqrt{\frac{E'^2}{c^2} - m^2c^2}\cos\vartheta = 0$$

$$\sqrt{\frac{E'}{c} + mc}\sqrt{\frac{E}{c} - mc}\cos\vartheta = \sqrt{\frac{E}{c} + mc}\sqrt{\frac{E'}{c} - mc}$$

$$\left(\frac{E'}{c} + mc\right)\left(\frac{E}{c} - mc\right)\cos^2\vartheta = \left(\frac{E}{c} + mc\right)\left(\frac{E'}{c} - mc\right)$$

$$\frac{E'}{c}\left(\frac{E}{c} + mc - \cos^2\vartheta\left(\frac{E}{c} - mc\right)\right) = \left(\frac{E}{c} + mc\right)mc$$
$$+\, mc\left(\frac{E}{c} - mc\right)\cos^2\vartheta$$

$$\frac{E'}{c} = mc \, \frac{E/c + mc + (E/c - mc)\cos^2\theta}{E/c + mc - (E/c - mc)\cos^2\theta}$$

$$T_0' = mc^2 \left[\frac{E/c + mc + (E/c - mc)\cos^2\theta}{E/c + mc - (E/c - mc)\cos^2\theta} - 1 \right]$$

$$= mc^2 \left[\frac{T_0 + 2mc + T_0\cos^2\theta}{T_0 + 2mc - T_0\cos^2\theta} - 1 \right]$$

$$= mc^2 \left[\frac{T_0(1 + \cos^2\theta) + 2mc}{T_0\sin^2\theta + 2mc} - 1 \right]$$

$$= mc^2 \left[\frac{T_0(1 + \cos^2\theta) + 2mc - T_0\sin^2\theta - 2mc}{T_0\sin^2\theta + 2mc} \right]$$

$$= 2mc^2 \left[\frac{T_0\cos^2\theta}{T_0\sin^2\theta + 2mc} \right]$$

Oefening 3

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{R^2} \qquad \text{Cirkelbaan}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{R_s}{R}} \frac{\tilde{E}}{c^2}$$

$$\frac{dR}{d\tau} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{R_s}{R}\right)\left(c^2 + \frac{\tilde{L}^2}{R^2}\right)}_{V(R)} = \frac{\tilde{E}^2}{c^2}$$

$$\frac{dV(R)}{dR} = 0 \Rightarrow \tilde{L}^2 = \frac{R_s R^2 c^2}{2R - 3R_s}$$

$$\frac{\tilde{E}^2}{c^4} = \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)\left(1 + \frac{R_s}{2R - 3R_s}\right) = \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)\left(\frac{2R - 2R_s}{2R - 3R_s}\right)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{R_s}{R}} \sqrt{1 - \frac{R_s}{R}} \sqrt{\frac{2R - 2R_s}{2R - 3R_s}} = \sqrt{\frac{2R}{2R - 3R_s}}$$

$$U^\mu = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dR}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau}\right)$$

$$= \left(c\sqrt{\frac{2R}{2R - 3R_s}}, 0, \dots\right)$$

Stationaire waarnemer: $U^\mu = \left(c\frac{dt}{d\tau}, 0, 0\right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{R}}}, 0, 0\right)$

Foton: $p^\mu = (p_\gamma^0, p_\gamma^R, 0)$

$\hookrightarrow$ behouden ($\tilde{E}$ v/h foton)

$$h \nu_{em} = c\, p_\gamma^\circ \sqrt{\frac{2R_{em}}{2R_{em} - 3R_s}} \qquad \boxed{E = p \cdot U}$$

$$h \nu_{obs} = c\, p_\gamma^\circ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{R_{obs}}}}$$

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_{obs}} = \sqrt{\frac{2R_e (R_{obs} - R_s)}{R_{obs}(2R_e - 3R_s)}}$$

<u>limieten</u> $R_e \to \infty : \sqrt{1 - \frac{R_s}{R_{obs}}}$

$R_{obs} \to R_s : \frac{\nu_e}{\nu_{obs}} \to 0 \leadsto \nu_{obs} \to \infty$
vanwege oneindige versnelling v/d observer

$R_e \to R_s$: Kan niet, er is zo geen geodeet
$1 + z \in \mathbb{C}$??