STATISTIEK I, BACHELOR WISKUNDE (PROF. C. LEY)
EXAMEN SEPTEMBER 2019

VEEL SUCCES!

VRAAG 1

Zij $X \sim \chi^2_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, toon dan aan dat

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\mathrm{I}(x \geq 0)$$

VRAAG 2

Zij $P(Y=1) = p$, $P(Y=-1) = 1-p$, $X \sim U[0,a]$ en X en Y onafhankelijk.

1. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van X^Y indien $a = 1$.
2. Stel dat we n realisaties observeren van stochastische veranderlijke Z, waar $Z = XY$.
   (a) Bepaal gebaseerd op deze realisaties de momentenschatters $\hat{a}_M$ en $\hat{p}_M$.
   (b) Toon aan dat deze schatters consistent zijn.
   (c) Bepaal de asymptotische verdelingen van $\hat{a}_M$ en $\hat{p}_M$.

VRAAG 3

Zij X en Y stochastische veranderlijken waarvoor geldt dat de conditionele kansverdeling van Y gegeven $X = x$ gelijk is aan

$$f_{Y|X=x}(y) = \theta e^{-\theta(y-x)}\,\mathrm{I}(y \geq x)$$

(a) Bepaal de maximum kans schatter voor parameter θ gebaseerd op n realisaties van stochastisch koppel (X, Y).

(b) Toon aan dat deze schatter consistent is.

(c) Bepaal de asymptotische verdeling van deze schatter.

(d) Bepaal hiermee een asymptotisch 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ.

VRAAG 4

In een onderzoek naar de slaagkans van twee behandelingen A en B, randomiseert men 200 personen gelijk over de twee behandelingen. Als resultaat bekomen we dat behandeling A succesvol was voor 60 van 100 behandelde personen en 70 van de 100 bij behandeling B.

(a) Zij $\hat{p}_A$ de proportie geslaagde behandelingen in groep A en $\hat{p}_B$ de proportie geslaagde behandelingen in groep B. Bepaal de asymptotische verdeling van $\hat{p}_A - \hat{p}_B$.

(b) Stel een asymptotische 95% betrouwbaarheidsinterval op voor het verschil in slaagkans tussen behandeling A en B.

(c) Voer een asymptotische test uit om na te gaan ofdat de slaagkans van behandeling A verschilt van de slaagkans van behandeling B. Formuleer een duidelijk besluit.

Vraag 5

Zij $X_1, X_2, ..., X_5$ onafhankelijke stochastische veranderlijken die normaal verdeeld zijn met verwachtingswaarde μ en variantie σ^2.

1. Stel dat $\mu = 0$, geef dan een 95% referentie-interval voor

$$\frac{X_1^2 + X_5^2}{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$$

2. Men claimed dat $\sigma = 1$. Stel dat in werkelijkheid $\sigma = 2$, wat is dan de kans dat je deze uitspraak kan weerleggen op het 5% significantieniveau indien je realisaties bekomt van $X_1, ..., X_5$?

Vraag 6

Een urn bevat in het begin één zwarte en één witte bal. Herhaaldelijk wordt er een willekeurige bal getrokken uit de urn. Na de kleur waar te nemen van de bal, legt men de bal terug in de urn en voegt men nog een bal van dezelfde kleur toe aan de urn.
Noem B_n het aantal zwarte ballen die toegevoegd zijn na n ($\in \mathbb{N}$) trekkingen, waar $B_0 = 0$. Na de n-de trekking zijn er dus $n + 2$ ballen in de urn, waarvan $B_n + 1$ zwart.
Toon dat voor alle $k \in \{0, 1, ..., n\}$ geldt dat $P(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

Vraag 7 (M)

Beschouw een veld van m op n vakjes, er zijn dus m rijen en n kolommen $(m, n \geq 3)$. Op dit veld liggen k mijnen verspreidt $(k \geq 8)$, in elk vakje kan maximaal 1 mijn liggen.
We zijn geïnteresseerd in zogenaamde 'gevaarlijke' vakjes. Een vakje is gevaarlijk als er in het vakje zelf geen mijn ligt, maar in alle (8) omringende vakjes wel een mijn ligt. Aangezien vakjes op de rand geen 8 buren hebben, kunnen zij per definitie niet gevaarlijk zijn. Bepaal het verwachte aantal gevaarlijke vakjes. (hint: je hoeft de kansverdeling van het aantal gevaarlijke vakjes niet te kennen.)

....

Hints:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^z \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{z-x}}dx = \frac{\sqrt{\pi}z^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$