Complexe Analyse 2019-2020 1e zit

Theorie op 12 punten

Vraag 1

Formuleer (geef de opgave) en bewijs de stelling van Liouville voor holomorfe functies.

Vraag 2

Toon aan dat elke bijectie $B(0,1) \to B(0,1)$ een Möbius-transformatie is.

Vraag 3

Als u harmonisch is op een open gebied Ω en $u = 0$ op een open bal $B \subseteq \Omega$, dan $u = 0$ op heel Ω.

Vraag 4

Hulpstelling (zie cursus Lemma 2.5.9)**.** *Zij z_0 een enkelvoudige pool van $f(z)$ en Γ_r een in tegenwijzerzin doorlopen boog, met middelpuntshoek φ, van de cirkel $|z - z_0| = r$. Dan is*

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = \varphi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Bewijs. Voor $0 < |z - z_0| < R$ is

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + A(z),$$

met $A(z)$ holomorf in de schijf $|z - z_0| \leq R$ (zekere $R > 0$) **[1]**. Daardoor is voor $0 < r < R$

$$\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = a_{-1} \underbrace{\int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}}_{\overset{[\mathbf{2}]}{=}\varphi i} + \underbrace{\int_{\Gamma_r} A(z)\mathrm{d}z}_{\leq M 2\pi r},$$

met $M = \max_{|z-z_0|\leq R} |A(z)|$ **[3]**. **[4]** $\square$

1. Waarom geldt deze ontbinding van $f(z)$?
2. Verklaar de gelijkheid.
3. Waarom bestaat deze M?
4. Hoe volgt het gevraagde hieruit?

Vraag 5

Definieer $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$.

a) Op welk deel van $\mathbb{C}$ is $\tan z$ gedefinieerd?

b) Op welk deel van $\mathbb{C}$ is $\tan z$ holomorf?

c) Op welk deel van $\mathbb{C}$ is $\tan z$ meromorf? Geef de definitie van meromorf.

d) Op welk deel van $\mathbb{C}$ is $\tan z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} z^n$?

Vraag 6

Zij $g(z)$ holomorf op het domein D van $\tan z$. Wat weet je over g als

a) $g(z) = \tan z$, voor alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $|z| = 2$?

b) $|g(z) - \tan z|$ een maximum bereikt op $B(i, 1)$?

c) $\displaystyle\int_{\partial B_+(\frac{\pi}{2},1)} (z - \frac{\pi}{2})^k g(z) \mathrm{d}z = \int_{\partial B_+(\frac{\pi}{2},1)} (z - \frac{\pi}{2})^k \tan z \, \mathrm{d}z$?

d) $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{g(z)}{\tan z} \right) \mathrm{d}z = 0$ voor alle eenvoudige contouren $\Gamma \subseteq D \setminus \{\text{nulpunten van } \tan\}$

e) $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{g(z)}{\tan z} \right) \mathrm{d}z = 0$ voor alle contouren $\Gamma \subseteq D \setminus \{\text{nulpunten van } \tan\}$

f) $\displaystyle\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{\tan z}{z - z_0}$ voor alle $z_0 \in \mathbb{C}$?

Vraag 7

Verklaar of weerleg de stappen in de volgende redenering:

$$e = e^{1+2\pi i} = \left(e^{1+2\pi i}\right)^{1+2\pi i} = e^{(1+2\pi i)(1+2\pi i)} = e^{1-4\pi^2}$$

Vraag 8

Zij $\Gamma = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subseteq \mathbb{R}$. Zij f holomorf in 0 en $g(z) \coloneqq f(z + iz)$. Wat kan je zeggen over de hoek tussen $f(\Gamma)$ en $g(\Gamma)$ in $f(0) = g(0)$?

Vraag 9

Verklaar of weerleg de stappen in de volgende redenering:

Zij $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$. Dan is $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} = \dfrac{1}{z} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$. Bijgevolg heeft f een essentiële singulariteit in $z = 0$.

Oefeningen op 8 punten

Vraag 1

Bereken de integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\pi x}{(2x-1)(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

door een gepaste functie langs een contour zoals in figuur I (zie cursus p. 67) te integreren ($\alpha = \pi$).

Vraag 2

De precieze vraag is verloren gegaan, maar het was analoog aan Vraag 4 uit de theorie, maar dan over het bewijs dat de functie

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right| \mathrm{d}\theta$$

met $f(z)$ een willekeurige holomorfe functie, strikt stijgend is.

Vraag 3

Zij f en g holomorfe functies zonder nulpunten waarvoor

$$\frac{f'(\frac{1}{n})}{f(\frac{1}{n})} = \frac{g'(\frac{1}{n})}{g(\frac{1}{n})}$$

Toon aan dat er een constante $c \in \mathbb{C}$ bestaat waarvoor $f = cg$.

Vraag 4

Zij $f(z)$ een holomorfe functie met $f(0) > 0$ en $\mathrm{Re}f(z) > 0$. Toon aan dat

(i) $\left| \dfrac{f(z) - f(0)}{f(z) + f(0)} \right| \leq |z|$

(ii) $f'(0) \leq 2f(0)$

(Je mag voor (ii) het resultaat uit (i) gebruiken, ook als je dit niet kon aantonen.)