Theorie examen Discrete Wiskunde I
Groep 1
Maandag 27 januari 2020

1. Beschouw de volgende stelling en haar bewijs. Geef een antwoord op de vragen die gesteld worden.

Stelling 1 (Stelling van Cantor) *Er bestaat een injectie maar geen bijectie van een verzameling naar zijn machtsverzameling*$^{(a)}$*. D.w.z, voor elke verzameling A geldt*

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|^{(b)}.$$

BEWIJS: Een injectie is eenvoudig, neem bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathcal{P}(X) \\ x &\mapsto \{x\}, \end{aligned}$$

wat een injectie definieert wegens het axioma van extensionaliteit.
Stel nu uit het ongerijmde$^{(c)}$ dat er een bijectie $h : X \to \mathcal{P}(X)$ bestaat. Beschouw de verzameling

$$Y = \{x \in X \mid x \notin h(x)\}.$$

Daar h een bijectie is, is er een unieke $y \in X$ waarvoor $h(y) = Y \in \mathcal{P}(X)^{(d)}$. Maar dan is

$$y \notin h(y) \quad \Leftrightarrow \quad y \in Y \quad \Leftrightarrow \quad y \in h(y)^{(e)},$$

een strijdigheid. □

(a) Wat is de machtsverzameling van een verzameling A?

(b) Geef een alternatief bewijs voor de stelling van Cantor voor eindige verzamelingen.

(c) Wat wens je te bekomen als je een bewijs uit het ongerijmde toepast?

(d) Verklaar deze uitspraak in detail.

(e) Deze uitspraak vereist de correcte stappen op het correcte moment. Bespreek deze uitspraak in detail. Bespreek zowel de mogelijkheid $y \in h(y)$ als de mogelijkheid $y \notin h(y)$ in detail, en toon aan hoe beide mogelijkheden tot een tegenstrijdigheid leiden.

2. Bewijs de stelling van Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ voor een willekeurig priemgetal p.

3. Zij θ een homomorfisme van de groep $(G, \cdot)$ in de groep $(G', \times)$.
Bewijs dat $\operatorname{im}(\theta) \leq G'$ en dat $\ker(\theta) \leq G$.

$(\theta(a))^{-1} = \theta(a^{-1})$

4. (a) Toon aan dat $n^5 \equiv n \pmod{10}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat $n^{1+4k} \equiv n \pmod{10}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Beschouw de volgende relatie R op de verzameling $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$aRb \Leftrightarrow \frac{b}{a} = n^2, \textit{ voor een zekere } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Onderzoek de eigenschappen reflexief, antireflexief, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch en transitief voor deze relatie R.

(c) Los de volgende lineaire recurrente betrekking op:

$$a_n = 4a_{n-1} + 1, n \geq 1,$$

met $a_0 = 1$.

(d) Zij B de verzameling van alle binaire reeksen van eindige lengte. Is deze verzameling B oneindig aftelbaar of oneindig overaftelbaar? Verklaar je antwoord.

(e) Is de groep $(\mathbb{Q}, +)$ cyclisch? Verklaar je antwoord.

Theorie examen Discrete Wiskunde I
Groep 2
Maandag 27 januari 2020

1. Geef de definitie van een aftelbare verzameling en van een overaftelbare verzameling.

   Toon aan dat de verzameling van de reële getallen overaftelbaar is.

2. Bewijs de stelling van Euler: als $\operatorname{ggd}(y, m) = 1$, dan geldt

   $$y^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

   Bewijs hieruit de kleine stelling van Fermat.

3. Geef en bewijs de volledige classificatie van alle cyclische groepen.

4. (a) Bezit de groep $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ een niet-triviale cyclische deelgroep? Verklaar je antwoord.

   (b) Waar of vals? Verklaar je antwoord.
   Kan een asymmetrische relatie ook reflexief zijn?

   (c) Geef de definitie van een homomorfisme θ van de groep $(G, \cdot)$ naar de groep $(G', \times)$.
   Toon aan dat $\theta(e) = e'$ met e het eenheidselement van $(G, \cdot)$ en e' het eenheidselement van $(G', \times)$.

   (d) Zij $q = p^2$, p priem.
   Wat is

   $$(q-1)! \pmod{q}?$$

   (e) Beschouw $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$, p priem.
   Toon aan dat er $\frac{p^2+p}{2}$ kwadratische vergelijkingen $X^2 + aX + b = 0$, met $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, bestaan die twee (mogelijks samenvallende) oplossingen hebben in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Theorie examen Discrete Wiskunde I
Groep 3
Dinsdag 28 januari 2020

1. Bewijs de formule

$$d_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

voor het aantal permutaties zonder fixelementen op n elementen.

2. Geef de definitie van Eulers totiëntfunctie φ en bereken $\varphi(n)$ voor alle natuurlijke getallen n. Bewijs dat

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

3. Geef de definitie voor de partities van een natuurlijk getal n. Geef alle partities van het getal 5.

   Geef de voortbrengende functie voor de partities van een natuurlijk getal n en bewijs dat dit effectief de voortbrengende functie voor de partities van een natuurlijk getal n is.

4. (a) Hoeveel involuties zijn er van de verzameling $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ naar de verzameling $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, met $n \geq m$?

   (b) Toon aan dat $\sqrt{8}$ een irrationaal getal is.

   (c) Zij $p \equiv 1 \pmod 4$, p priem, dan is $-1 \pmod p$ een kwadraat $\pmod p$.

   Geef een oplossing voor de kwadratische vergelijking

$$X^2 \equiv -1 \pmod p.$$

   (d) Toon aan dat

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

   (e) Toon aan dat de doorsnede van twee deelgroepen H_1 en H_2 van een gegeven groep G opnieuw een deelgroep is van G.

Theorie examen Discrete Wiskunde I
Groep 4
Dinsdag 28 januari 2020

1. Geef de definitie van een multinomiaalgetal. Bewijs de formule van een multinomiaalgetal in termen van permutaties. Bewijs de multinomiaal stelling.

2. Geef de definitie van een *ongeordend telprobleem*. Wat is een voortbrengende functie van een ongeordend telprobleem? Bewijs dat de voortbrengende functie van de som van *ongeordende telproblemen* het product van de voortbrengende functies van de afzonderlijke telproblemen is.

3. Beschouw de lineaire recurrente betrekking van de orde k met constante coëfficiënten

$$a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \cdots + \lambda_k a_{n-k} + f(n), n \geq k.$$

Toon aan dat alle oplossingen a_n voor deze lineaire recurrente betrekking te schrijven zijn als

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

met $a_n^{(h)}$ een willekeurige oplossing voor de bijhorende homogene lineaire recurrente betrekking, en met $a_n^{(p)}$ één vast gekozen oplossing voor de originele lineaire recurrente betrekking $a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \cdots + \lambda_k a_{n-k} + f(n), n \geq k$.

4. (a) Zij P een predikaat inwerkend op de verzameling van de reële getallen. Wat betekent de volgende uitspraak? Verklaar je antwoord.

$$(\forall x \forall y)((Px \wedge Py) \rightarrow (x = y)).$$

(b) Zij p een oneven priemgetal. Zij x een onbekend element uit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, en stel dat

$$\prod_{z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0, x\}} z \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wat is x?

(c) Toon aan dat elke deelgroep $(G, +)$, $G \neq \{0\}$, van de groep $(\mathbb{Z}, +)$ een cyclische groep is.

(d) Voor sommige verzamelingen A, B, C, D is $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ en voor sommige verzamelingen A, B, C, D is $(A \times B) \cup (C \times D)$ een stricte deelverzameling van $(A \cup C) \times (B \cup D)$. Geef een voorbeeld voor de verzamelingen A, B, C, D waarvoor $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

(e) Zij R een abelse ring. Zij a een nuldeler in de ring R. Toon aan dat voor elk element c van de ring R het product ac ofwel een nuldeler is van de ring R ofwel gelijk is aan 0.