Examen Kwantummechanica 2

Derde Bachelor Fysica en Sterrenkunde 7 januari 2020

Theorie

Vraag 1: Tijdsafhankelijke perturbatietheorie

a. Geef het verschil tussen het Schrödingerbeeld en het Heisenbergbeeld.

b. Geef de tijdsevolutie van golffuncties en operatoren in het interactiebeeld.

c. Beschouw een constante perturbatie

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t \leqslant 0 \\ V_0 & \text{als } t > 0 \end{cases}$$

Ontwikkel de evolutieoperator $U_I = T\left(\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\int_0^t \widehat{V}_I(t)dt'\right)\right)$ tot op eerste orde in de potentiaal en bereken de coëfficient $c_n(t)$. Leid hiermee de gouden regel van Fermi af.

d. Stel dat de eerste orde correctie nul oplevert. Leid in dat geval ook de tweede orde correctie term af.

Vraag 2: Translatiesymmetrie

Gegeven de translatieoperator $\widehat{T}(d\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{1}} - \frac{i}{\hbar}\widehat{\mathbf{p}}.d\mathbf{r}$.

a. Bereken de commutator van $\widehat{T}(d\mathbf{r})$ en $\widehat{\mathbf{r}}$ en leid daaruit de commutatierelatie tussen de positie- en de momentumoperator af.

b. Bepaal de vorm van de momentumoperator in de configuratierepresentatie.

c. Bepaal de (genormeerde) eigentoestanden van de momentumoperator in de configuratierepresentatie.

d. Gegeven een infinitesimale boost $U(d\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{1}} - \frac{i}{\hbar}\widehat{\mathbf{K}}.d\mathbf{v}$. Beschouw nu een infinitesimale translatie na een infinitesimale boost. Mogen deze twee operaties van plaats verwisseld worden? Waarom wel/niet?

Vraag 3

Wat is de minimale dimensie die de gamma matrices moeten hebben in een tweedimensionale ruimte (1 tijdsdimensie, 1 ruimtedimensie)? Leg uit.

Vraag 4

Leg aan de hand van een Stern-Gerlach experiment uit waarom de golffuncties van deeltjes met spin $\frac{1}{2}$ leven in de Hilbertruimte $\mathbb{C}^2$ en niet $\mathbb{R}^2$.

Vraag 5

Welke eigenschap hebben de golffuncties van deeltjes die transformeren volgens de projectieve representatie van de rotatiegroep? Leg uit.

Vraag 6

[1]

Vraag 7

Gegeven de Hamiltoniaan

$$\widehat{H} = \sum_{i=1}^{L-1} \widehat{\mathbf{S}}_i \cdot \widehat{\mathbf{S}}_{i+1} \text{ met}$$
$$\widehat{\mathbf{S}}_i \cdot \widehat{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbb{1}_1 \otimes ... \otimes \mathbb{1}_{i-1} \otimes \widehat{\mathbf{S}}_i \otimes \widehat{\mathbf{S}}_{i+1} \otimes \mathbb{1}_{i+2} \otimes ... \otimes \mathbb{1}_L$$

Als je weet dat de toestand met alle spins up $\left(|\uparrow\rangle^{\otimes L}\right)$ één van de mogelijke grondtoestandsconfiguraties is, wat kan je dan zeggen over de grondtoestandsontaarding? Leg uit.

Oefeningen

Vraag 1

Beschouw 2 regelmatige cirkels met N posities die binnen elkaar liggen en noem de toestanden op deze posities $|i\rangle_{C1}$ voor de binnenste cirkel en $|i\rangle_{C2}$ voor de buitenste cirkel, met i=1,2,...,N. De actie van de Hamiltoniaan op deze toestanden wordt gegeven door

$$\widehat{H}\,|i\rangle_{C1} = A\,|i+1\rangle_{C1} + A\,|i-1\rangle_1 + B\,|i\rangle_{C2}$$
$$\widehat{H}\,|i\rangle_2 = A\,|i+1\rangle_{C2} + A\,|i-1\rangle_{C2} + B\,|i\rangle_{C1}$$

a. Bepaal de eigenwaarden en eigentoestanden van de Hamiltoniaan.
Hint: maak hierbij gebruik van de operator $\widehat{R}$ die als actie $\widehat{R}\,|i\rangle = |i+1\rangle$ heeft en zijn inverse $\widehat{R}^{-1}$.
De eigentoestanden van $\widehat{R}$ zijn $|\psi_n\rangle$ =... met eigenwaarden λ_n =... [2]

b. [1]

c. [1]

d. [1]

Vraag 2

Gegeven de golffunctie [3]

$$\psi = N\left(1 + \exp\left(\frac{-Zr}{2a_0}\right) - \frac{Zr}{2a_0}\sin^2(\theta)\right)\exp\left(\frac{-Zr}{2a_0}\right)$$

waarbij N een normeringsconstante is. Je mag bij deze opgave gebruik maken van de uitdrukking voor de gammafunctie die onderaan gegeven staat.

a. Bepaal de normeringsconstante N.

b. Bepaal of ψ een eigenfunctie is van de Hamiltoniaan van het waterstofatoom.

c. Bepaal de mogelijke eigenwaarden bij een meting van $\overrightarrow{L}^2$.

---

[1]Deze vraag weet ik niet meer.

[2]De uitdrukkingen voor $|\psi_n\rangle$ en λ_n waren wel degelijk gegeven, ik weet ze gewoon niet meer en vind ze ook nergens terug.

[3]Ik denk dat de functie er ongeveer zo uit zag, het zou kunnen dat dit op het examen ietsje anders was.

d. Bepaal voor elk van deze mogelijke eigenwaarden de kans dat bij een meting deze waarde gemeten wordt.

$$\Gamma(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t t^{n-1} dt = (n-1)!$$