EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN MEETKUNDE I

13 JANUARI 2020

EERSTE BACHELOR WISKUNDE

- **Vermeld je naam op elk blad.**
- Schrijf je antwoorden op het geruite papier.
  - **Noteer je antwoorden op theorievragen op de dubbelgevouwen bladen.**
  - **Noteer je antwoorden op oefeningen op *aparte*, enkele bladen.**
  - **Dien voor iedere vraag een antwoord in, ook al heb je deze niet opgelost.**
- Leg je studentenkaart (of een ander identificatiebewijs) zichtbaar klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten volledig **uitgeschakeld** zijn.
- Elke **poging** tot spieken kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens uit de eerste zittijd.
- Je beschikt over 4 uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle voorgaande deeltjes, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Veel succes!

Theorie

Opgave 1. (5 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(i) In het bewijs van Stelling 2.5.2 (p. 63) staat: "Uit $A = CE$ volgt dat iedere rij R_i van A een lineaire combinatie is van $\{E_1, \dots, E_s\}$;" Verklaar in detail.

(ii) In Definitie 3.3.2 (p. 82) staat: "Deze afbeeldingen zijn lineair;" Verklaar.

(iii) Na Definitie 5.4.7 (p. 120) staat: "Er volgt dat het spoor van geconjugeerde matrices gelijk is." Verklaar.

(iv) In Definitie 6.2.8 (p. 133) staat: "(We merken nogmaals op dat dit een assumptie is.)" Wat bedoelt men met deze assumptie?

(v) In het bewijs van Stelling 7.6.3 (p. 163–164) staat: "We moeten aantonen dat $u = 0$, en omdat φ surjectief is en het inproduct niet-ontaard is, volstaat het hiertoe om aan te tonen dat $u \cdot \varphi(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{R}^n$." Waarom volstaat dit?

Opgave 2. (1 punt) Zij V een eindig dimensionale Euclidische $\mathbb{R}$-vectorruimte en $F : V \to V$ een symmetrisch endomorfisme met de eigenschap dat F^d de nulafbeelding voor een zeker natuurlijk getal $d > 0$. Toon aan dat F de nulafbeelding is.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een bewijs; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij $F : V \to W$ lineair en $U \leq W$. Dan geldt

$$\dim F^{-1}(U) = \dim(U \cap \operatorname{im} F) + \dim \ker F.$$

(ii) Zij $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ Dan geldt $\ker(L_{A^t \cdot A}) = \ker(L_A)$.

(iii) Zij $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ met $\chi_A(0) = 0$. Dan is A inverteerbaar.

(iv) Zij $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ met $AB = BA$ en alle eigenwaarden van A en B hebben algebraïsche multipliciteit 1. Dan hebben A en B dezelfde eigenvectoren (ondanks de bijhorende eigenwaarden niet noodzakelijk gelijk zijn).

Begin een nieuw geruit (enkel) blad.

Opgave 4. (4 punten) Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een lineaire operator met de volgende matrixvoorstelling ten opzichte van de standaardbasis:

$$A_f = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 21 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bewijs dat A_f diagonaliseerbaar is.

(ii) Bepaal een basis B van eigenvectoren voor f en bepaal de overgangsmatrix P van de standaardbasis naar B.

(iii) Bepaal $P^{-1}A_fP$ en bereken P^{-1}.

(iv) Zij $v = (1,1,1)^t$. Bepaal $f^{(2020)}(v)$.
Hier betekent $f^{(n)}$ de operator f, n keer na elkaar uitgevoerd.

Begin een nieuw geruit (enkel) blad.

Opgave 5. (3 punten) We willen bewijzen dat als A een vierkante, reële, symmetrische matrix is van rang 1, alle niet-nul diagonaalelementen van A hetzelfde teken hebben. Aan de hand van onderstaande stappen stellen we het bewijs op.

Stel $n \in \mathbb{N}^\times$ en zij $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(i) Bewijs dat A rang 1 heeft als en slechts als $A = vw^t$ voor zekere niet-nul vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Zij A van rang 1; uit (i) weten we dat $A = vw^t$ voor zekere niet-nul vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat A symmetrisch is als en slechts als v en w lineair afhankelijk zijn.

(iii) Zij A symmetrisch en van rang 1. Bewijs dat $A = \sigma zz^t$ voor een $\sigma \in \{-1, 1\}$ en een zekere niet-nul vector $z \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Zij A symmetrisch en van rang 1. Bewijs dat alle niet-nul diagonaalelementen hetzelfde teken hebben.

Begin een nieuw geruit (enkel) blad.

Opgave 6. (3 punten) Beschouw de vier punten $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^4$

$$P_1 = (3,-4,1,6)^t, P_2 = (3,-2,-10,0)^t, P_3 = (2,0,-3,2)^t, P_4 = (1,2,4,4)^t.$$

(i) Bepaal de dimensie van de affiene deelruimte opgespannen door P_1, P_2, P_3 en P_4.

(ii) Bepaal de doorsneden van deze affiene deelruimte met het hypervlak H, bepaald door de vergelijking $4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 6 = 0$.

(iii) Voor welke waarde(n) van $a \in \mathbb{R}$ is de rechte $L = (1,2,3,4)^t + \langle (a,-4,-12,0)^t \rangle$ parallel met H?