THEORIE

Opgave 1. (5 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(i) In het bewijs van Stelling 2.5.2 (p. 63) staat: "Uit $A = CE$ volgt dat iedere rij R_i van A een lineaire combinatie is van $\{E_1, \ldots, E_s\}$;" Verklaar in detail.

(ii) In Definitie 3.3.2 (p. 82) staat: "Deze afbeeldingen zijn lineair;" Verklaar.

(iii) Na Definitie 5.4.7 (p. 120) staat: "Er volgt dat het spoor van geconjugeerde matrices gelijk is." Verklaar.

(iv) In Definitie 6.2.8 (p. 133) staat: "(We merken nogmaals op dat dit een assumptie is.)" Wat bedoelt men met deze assumptie?

(v) In het bewijs van Stelling 7.6.3 (p. 163–164) staat: "We moeten aantonen dat $u = 0$, en omdat φ surjectief is en het inproduct niet-ontaard is, volstaat het hiertoe om aan te tonen dat $u \cdot \varphi(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{R}^n$." Waarom volstaat dit?

Opgave 2. (1 punt) Zij V een eindig dimensionale Euclidische $\mathbb{R}$-vectorruimte en $F : V \to V$ een symmetrisch endomorfisme met de eigenschap dat F^d de nulafbeelding voor een zeker natuurlijk getal $d > 0$. Toon aan dat F de nulafbeelding is.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een bewijs; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij $F : V \to W$ lineair en $U \leq W$. Dan geldt

$$\dim F^{-1}(U) = \dim(U \cap \operatorname{im} F) + \dim \ker F.$$

(ii) Zij $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ Dan geldt $\ker(L_{A^t \cdot A}) = \ker(L_A)$.

(iii) Zij $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ met $\chi_A(0) = 0$. Dan is A inverteerbaar.

(iv) Zij $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ met $AB = BA$ en alle eigenwaarden van A en B hebben algebraïsche multipliciteit 1. Dan hebben A en B dezelfde eigenvectoren (ondanks de bijhorende eigenwaarden niet noodzakelijk gelijk zijn).

Oefeningen

Begin een nieuw geruit (enkel) blad voor elke opgave.

Opgave 4. (3 punten) Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix},$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) Onderstel dat $a \neq 0$. Zijn er voorwaarden waaraan b en c moeten voldoen opdat A diagonaliseerbaar zou zijn? Verklaar!

(ii) Onderstel nu dat $a = 0$. Bewijs dat A diagonaliseerbaar is als en slechts als $b = c = 0$.

Opgave 5. (4 punten) Stel

$$P_2(\mathbb{R}) = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Beschouw de afbeelding

$$\rho : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 : \rho(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

(i) Toon aan dat ρ een lineaire afbeelding is.

(ii) Toon aan dat Ker $\rho = \langle x^2 - 2x \rangle$.

(iii) Toon aan dat $\mathcal{B} = \{1, x, x^2 - 2x\}$ een basis is voor $P_2(\mathbb{R})$.

(iv) Stel $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ de standaardbasis voor $\mathbb{R}^2$, bepaal dan de matrix $A_{\rho,\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Opgave 6. (3 punten) Beschouw de vier punten $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^4$

$$P_1 = (3, -4, 1, 6)^t, P_2 = (3, -2, -10, 0)^t, P_3 = (2, 0, -3, 2)^t, P_4 = (1, 2, 4, 4)^t.$$

(i) Bepaal de dimensie van de affiene deelruimte opgespannen door P_1, P_2, P_3 en P_4.

(ii) Bepaal de doorsneden van deze affiene deelruimte met het hypervlak H, bepaald door de vergelijking $4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 6 = 0$.

(iii) Voor welke waarde(n) van $a \in \mathbb{R}$ is de rechte $L = (1, 2, 3, 4)^t + \langle (a, -4, -12, 0)^t \rangle$ parallel met H?