EXAMEN
RELATIVITEITSTHEORIE

Academiejaar 2019-2020

theorie

1e zit, 29/01/2020

- Schrijf op elk antwoordblad duidelijk je naam en richting
- Geef op het einde alles af: opgaveblad + antwoordbladen + kladbladen

1. $E = mc^2$ (**3 punten**).

   - Definieer eerst de snelheidsviervector U^μ en vervolgens de energie-impulsviervector p^μ voor een massief puntdeeltje. Leg hierbij duidelijk uit waarom deze objecten idd. als een vier-vector transformeren.
   - Argumenteer vanuit de Newtoniaanse mechanica waarom we p^0 (op een factor na) met de energie E van ons puntdeeltje kunnen associeren.
   - Toon vervolgens aan dat: $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ (met $\vec{p}.\vec{p} \equiv p^2$).

2. Relativistisch testdeeltje in een elektromagnetisch veld (**6,5 punten**)

   - Leid de manifest covariante bewegingsvergelijkingen af in de Minkowski ruimtetijd, gegeven de volgende actie voor een deeltje met massa m en lading e (en met $ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}$):

   $$S = -mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_\mu dx^\mu \tag{1}$$

   - Toon expliciet aan dat we inderdaad de gekende uitdrukking terugvinden voor de Lorentzkracht ($\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$), en leg hierbij duidelijk het verschil uit met de analoge uitdrukking in de Newtoniaanse mechanica.

     gegeven:

   $$F^{i0} = -F^{0i} = \frac{E^i}{c} \qquad F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k. \tag{2}$$

   - Beschouw een neutraal vrij deeltje A (met lading $e = 0$) en een geladen deeltje B die op eenzelfde plek vertrekken en elkaar even later terug tegenkomen. Voor welk van de twee deeltjes verstreek hierbij de meeste tijd?

3. Gravitationele roodverschuiving uit equivalentrieprincipe. (**3 punten**).

   Leg het equivalentieprincipe uit en gebruik dit om de uitdrukking af te leiden voor de gravitationele roodverschuiving in een algemeen (zwak) gravitatieveld, met Newtoniaanse potentiaal ϕ

   Gegeven: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c}$ voor de longitudinale Dopplerverschuiving bij kleine v.

4. De Einstein tensor (**2 punten**).

   - Definieer de Einstein-tensor $G_{\mu\nu}$, en toon aan dat deze voldoet aan $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Gegeven:
   $$D_\rho R_{\mu\nu\alpha\beta} + D_\beta R_{\mu\nu\rho\alpha} + D_\alpha R_{\mu\nu\beta\rho} = 0\,. \tag{3}$$
   Vermeld hierbij de eigenschappen van de Riemann tensor, Ricci tensor, de covariante afgeleide en de metriek die je eventueel gebruikt.
   - Leg het belang uit van deze eigenschap.

5. Ruimtetijdkromming door de aarde (**1,5 punt**)

   In de cursus leiden we in **de zwakke veldlimiet** het verband $g_{00} \approx (1+\frac{2\phi}{c^2})$ af, tussen de 00-component van de metriek en de Newtoniaanse potentiaal ϕ. Gebruik dit om de **grootte-orde** van de ruimte-tijd kromming in de buurt van het aardoppervlak af te schatten (in eenheden $1/m^2$).

6. Het zwarte gat (**4 punten**).

   De Schwarzschildmetriek leest:
   $$ds^2 = c^2dt^2(1 - R_S/r) - \frac{1}{(1 - R_S/r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2\,. \tag{4}$$

   - Herschrijf deze uitdrukking voor het lijnelement ds^2 in Eddington-Finkelstein coördinaten (v, r, θ, φ). Deze worden gedefinïeerd door de eis dat ingaande radïele lichtbanen horizontaal liggen in het (r, v)-vlak $(dv/dr = 0)$.
   - Eens voorbij de horizon van een zwart gat kan je niet meer terug. Beredeneer deze kenmerkende eigenschap van het zwarte gat op basis van een ruimtetijddiagram in het (r, v)-vlak. Leg hierbij duidelijk uit hoe je de verschillende lijnen (en in het bijzonder hun richtingscoëfficiënt) bepaalde. **Ook nog:** kan je eens voorbij de horizon nog signalen ontvangen die van buiten het zwarte gat werden verzonden? Illustreer opnieuw op het (r, v) ruimtetijddiagram.

Oefeningenexamen relativiteitstheorie

Januari 2020

Oefening 1 - Speciale relativiteit (4 punten)

Drie deeltjes A, B en C met rustmassa's m_A, m_B en m_C botsen met elkaar. Hun initiële snelheden zijn $\vec{v}_A = (3c/4, 0, 0)$, $\vec{v}_B = (0, 3c/4, 0)$ en $\vec{v}_C = (0, 3c/4, 0)$. Na de elastische botsing bewegen A en C samen verder (hun snelheden na de botsing zijn gelijk). Geef de energie van deeltje B na de botsing zoals gezien door een waarnemer die meebeweegt met deeltjes A en C in functie van de rustmassa's.

Oefening 2 - Algemene relativiteit (6 punten)

In een Schwarzschildmetriek bewegen twee testdeeltjes. Het eerste deeltje beweegt langs een cirkelvormige geodeet op radiële afstand $R_0 = 4R_S$, met R_S de Schwarzschildstraal. Het tweede deeltje volgt een radiële geodeet weg van het centrum, maar heeft onvoldoende energie om te ontsnappen en valt terug wanneer het $r = R_*$ bereikt. De twee deeltjes kruisen elkaar zowel bij de opwaartse als de neerwaartse beweging. Tussen deze twee ontmoetingen maakt het deeltje op de cirkelbaan tien omwentelingen. Als hun klokken gelijk worden gesteld bij de eerste ontmoeting, wat is dan het verschil in eigentijd bij de tweede ontmoeting in functie van R_*?

Zoals gezien in de oefeningenlessen kan je de radiële baan integreren met behulp van de substitutie

$$r = \frac{R_*}{2}(1 + \cos\eta)\,,$$

en dan gebruik te maken van

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+\cos\eta}{1-\cos\eta}} \sin\eta \,\mathrm{d}\eta &= (\eta + \sin\eta)\tan\frac{\eta}{2}\left(\sqrt{\cot^2\frac{\eta}{2}}\right) + \text{cte} \\ &= \eta + \sin\eta \quad \text{voor onze doeleinden} \end{aligned}$$