Statistiek I, Bachelor Wiskunde (Prof. C. Ley)
Examen Januari 2020

Tussen haakjes staan de indicatieve punten. Veel succes !

Vraag 1 (15 punten)

Zij
— $E[Y \mid X] = \alpha + \beta X$
— $W = X + U$
— $X \perp\!\!\!\perp U$
— $Y \perp\!\!\!\perp U \mid X$
— $Var(U) = \sigma^2$

Toon aan dat

(a) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \beta Var(X)$;

(b) $\mathrm{Cov}(Y, W) = \mathrm{Cov}(X, Y)$;

(c) $\hat{\beta} := \dfrac{-\overline{Y}_n \overline{W}_n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i W_i}{-\sigma^2 - \left(\overline{W}_n\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i^2}$ een consistente schatter is voor β.

Vraag 2 (12 punten)

Het koppel (X, Y) is bivariaat normaal verdeeld met gemiddelde (μ_X, μ_Y), $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$ en $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Zij (R, Θ) het koppel van stochastische veranderlijken dat voldoet aan

$$\begin{cases} X = R\sigma_X \cos(\Theta) + \mu_X \\ Y = R\sigma_Y \sin(\Theta) + \mu_Y \end{cases}$$

met $\Theta \in [0, 2\pi[$ en $R \in \mathbb{R}^+$. Bepaal de verdeling van R^2.

Vraag 3 (15 punten)

Zij $X \stackrel{d}{=} Exp(\lambda)$, $Y \stackrel{d}{=} Poisson(\lambda)$ en X onafhankelijk van Y. Veronderstel dat je beschikt over een i.i.d. steekproef van n koppels (X, Y), bepaal dan de maximum likelihood schatter voor λ. Toon dat deze schatter consistent is en bepaal de asymptotische verdeling van de schatter.

Vraag 4 (20 punten)

Het bedrijf Nutrifoodz Ketones verkoopt vermageringspillen. Niet lang geleden hebben ze de samenstelling van hun vermageringspillen veranderd en men is geïnteresseerd of de kwaliteit al dan niet beter is. Hiertoe heeft men 20 lukrake personen ondervraagt over hun ervaring met het gebruik van de pillen voor een volledige maand. 10 van hen gebruikten de oude versie, deze personen vielen gemiddeld 4.9 kg af na 1 maand met een steekproefstandaarddeviatie van 1.1 kg. De 10 resterende personen gebruikten de nieuwe versie en vielen gemiddeld 5.2 kg af na 1 maand met een steekproefstandaarddeviatie van 1.2 kg. U mag voor de komende vragen ervan uitgaan dat het gewichtsverlies bij gebruik van de pillen normaal verdeeld is.

(a) Test ofdat de variantie van het gewichtsverlies verschilt tussen de oude en de nieuwe versie van de vermageringspil, vermeld hierbij de p-waarde.

(b) Wat is het percentage type II-fouten van deze test-procedure indien de standaarddeviatie van het gewichtsverlies bij de nieuwe versie 2 keer zo groot is als van de oude versie ?

(c) U mag voor de vragen (d) en (e) ervan uitgaan dat de variantie van het gewichtsverlies hetzelfde is voor de oude en de nieuwe versie van de vermageringspil. Bespreek de betrouwbaarheid van deze aanname.

(d) Bepaal een zo klein mogelijk interval dat met 95% zekerheid de standaarddeviatie van het gewichtsverlies na 1 maand gebruik van een vermageringspil van Nutrifoodz Ketones bevat.

(e) Het bedrijf schakelt u als expert in om na te gaan ofdat de verbetering van de werking van de vermageringspil statistisch significant is. Wat zal u vertellen aan het bedrijf ?

Wees volledig in jouw antwoorden, geef bijvoorbeeld duidelijk de nul- en alternatieve hypothese aan wanneer je een test uitvoert ! Voer testen tevens uit op het 5% significantieniveau.

Vraag 5 (8 punten)

Een munt die Kop met waarschijnlijkheid p geeft, wordt Z keer gegooid. Laat X de variabele zijn die het aantal verschijningen van Kop telt en Y degene die het aantal verschijningen telt van Munt. Zijn deze twee variabelen onafhankelijk indien Z een Poisson-verdeling met gemiddelde $\lambda > 0$ volgt ?

Vraag 6 (15 punten)

Zij $X_1, X_2, ..., X_n$ onafhankelijk en uniform getrokken uit het interval $[-\theta, \theta]$ met $\theta \in \mathbb{R}_0^+$. Dan geldt

$$n\left(\max_{i=1}^{n}|X_i| - \theta\right) \xrightarrow{d} Y$$

Voor een zekere stochastische veranderlijke Y. Bepaal de verdeling van Y.

Vraag 7 (5 punten)

Zij X een discrete stochastische veranderlijke met waarden op $\mathbb{N}^+$. Stel dat $\mathrm{E}[X] < \infty$, toon dat $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq i)$.