Examen Statistische fysica 1

Derde Bachelor Fysica en Sterrenkunde 20 januari 2020

Theorie

Vraag 1

T1a: Toon aan hoe de partitiefunctie voor een klassiek en ideaal gas kan uitgebreid worden wanneer interacties $U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ tussen de deeltjes in rekening worden gebracht. Introduceer en definieer hierbij de configurationele partitiefunctie.

T1b: Een twee-deeltjes correlatiefunctie voor een systeem van N deeltjes wordt gedefinieerd door middel van een uitdrukking van het type

$$g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left(\frac{V}{N}\right)^2 \frac{N!}{(N-2)!}$$
$$\times \frac{\int d\vec{r}_3 \int d\vec{r}_4 ... \int d\vec{r}_N \exp\left[-\beta \sum_{i<j} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\right]}{\int d\vec{r}_1 ... \int d\vec{r}_n \int d\vec{r}_{n+1} \int d\vec{r}_N \exp\left[-\beta \sum_{i<j} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\right]}$$

i. Leg uit waarom in de meeste gevallen de twee-deeltjes correlatiefunctie enkel afhangt van de relatieve afstand tussen de twee deeltjes: $g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = g^{(2)}(r_{12})$.

ii. Leg uit waarom de twee-deeltjes correlatiefunctie informatie bevat over de niet-random ruimtelijke distributie van molecule-paren.

T1c: Bewijs de drukvergelijking

$$\frac{P}{\rho kT} = 1 - \frac{\rho}{6kT} \int_0^{+\infty} dr_{12} \frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} g^{(2)}(r_{12}, \rho, T) 4\pi r_{12}^3 \ .$$

Je mag hierbij gebruik maken van de volgende gelijkheid voor een twee-deeltjes observabele h:

$$\overline{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) h(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \ .$$

Vraag 2

Beschouw een systeem van N magnetische dipolen $\vec{\mu}$ van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes die in een extern magnetisch veld $\vec{\mathcal{B}}$ worden geplaatst. We veronderstellen dat de verschillende magnetische dipolen met elkaar interageren via een dichtste-nabuur interactie met sterkte J_0 (Ising systeem).

T2a: Leid de algemene partitiefunctie af voor dergelijk systeem.

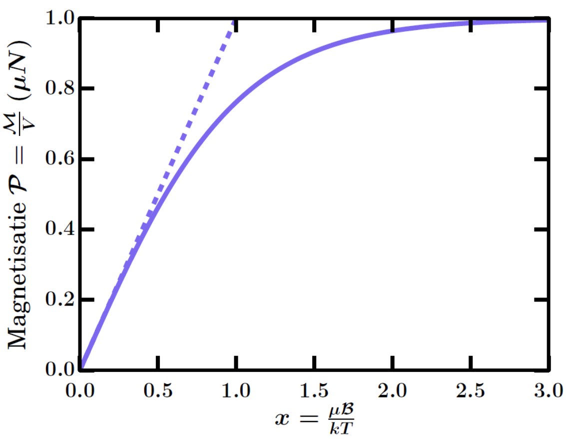
T2b: Toon nu aan dat in het één-dimensionale geval deze partitiefunctie zich herleidt tot

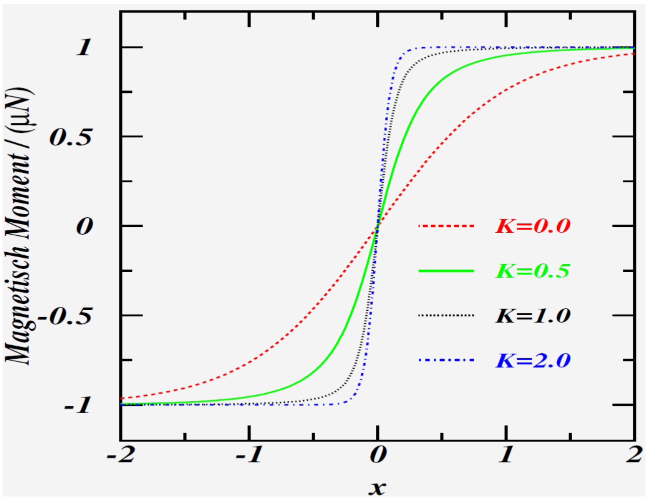
$$Z(T, \mathcal{B}, N) = \sum_{\sigma_1^z=\pm 1} \sum_{\sigma_2^z=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N^z=\pm 1} \langle \sigma_1^z | \widehat{P} | \sigma_1^z \rangle \langle \sigma_2^z | \widehat{P} | \sigma_2^z \rangle \dots \langle \sigma_N^z | \widehat{P} | \sigma_N^z \rangle$$

waarbij $\widehat{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Bepaal ook uitdrukkingen voor P_{11}, P_{12}, P_{21} en P_{22}.

T2c: Bereken de partitiefunctie voor het geval van een paramagneet en bepaal de totale magnetisatie.

T2d: Bespreek in maximaal 15 lijnen de onderstaande grafieken. [1]





[1] Op het examen waren alle figuren zwart-wit.

Vraag 3

T3a: Bewijs dat voor een ideaal kwantumgas geldt dat

$$p_{Nr} = \frac{\exp[\beta(\mu N - E_{Nr})]}{\mathcal{Z}} \ .$$

Wat is p_{Nr}? Leg bondig (zonder formeel bewijs) uit wat het verband is tussen p_{Nr} en het 'principle of maximum entropy'.

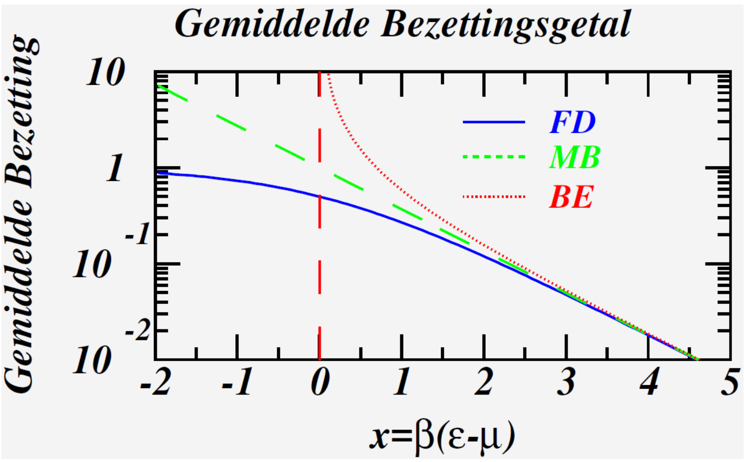
T3b: Toon aan hoe uit de bovenstaande vergelijking de uitdrukkingen

$$\overline{n_i}^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$$
$$\overline{n_i}^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$$

kunnen worden afgeleid. Geef de voorwaarden die moeten voldaan zijn om deze twee vergelijkingen te bekomen en leg ook uit onder welke voorwaarden de twee uitdrukkingen gelijk worden. Bespreek daarbij ook de onderstaande figuur in maximum 15 lijnen. [2]

T3c: Bewijs dat voor een ideaal kwantumgas de uitdrukking voor de entropie van de volgende vorm is:

$$S = -k \sum_{Nr} p_{Nr} \ln p_{Nr} \ .$$



[2]Op het examen waren alle figuren zwart-wit.

Oefeningen

Oefening 1

Beschouw een ééndimensionaal en niet-relativistisch ideaal Fermi gas. De N deeltjes hebben een spin $S = \frac{5}{2}$ en een massa $m \neq 0$ en bewegen in een lengte L. De Hamiltoniaan van het systeem is

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} \ .$$

Voor de deelvragen O1a tem O1c mag je ervan uitgaan dat de thermische golflengte van de deeltjes veel kleiner is dan de gemiddelde afstand tussen de deeltjes. [3]

O1a: Bereken de vrije energie van het systeem.

O1b: Bereken de druk van het systeem. Komt de gevonden uitdrukking overeen met de verwachting? Leg uit.

O1c: Bereken de chemische potentiaal van het systeem. Komt de gevonden uitdrukking overeen met de verwachting? Leg uit.

O1d: Bereken de grootpotentiaal van het systeem.

O1e: Bereken de entropie van het systeem.

O1f: Bereken de chemische potentiaal van het systeem in het gebied waar kwantumeffecten van belang zijn.

O1g: Bereken op basis van het vorige resultaat (O1f) de limiet voor temperaturen veel hoger dan de Fermi temperatuur T_F. Vind je hier het eerder gevonden resultaat voor de klassieke limiet terug (O1c)? Bereken ook de laagste-orde kwantummechanische correctie op dit resultaat.

[3] Bij deze vraag werd als opmerking gegeven dat in het tweede deel van de oefening de 'onmogelijke' integralen, dit zijn integralen die je niet kan uitwerken, gewoon mogen blijven staan en bijvoorbeeld met een letter aangeduid mogen worden om niet telkens de hele integraal te moeten schrijven.

Oefening 2

Conductie-elektronen in metalen kunnen behandeld worden als een kwantummechanisch gas van spin-$\frac{1}{2}$ fermionen met een dichtheid $\rho = \dfrac{N}{V}$. Noem N_+ (N_-) het aantal elektronen met spin up (spin down). In de afwezigheid van een extern magnetisch veld kan men in laagste orde de spin-up en spin-down conductie-elektronen als ontaard beschouwen: $N_+ = N_- = \dfrac{N}{2}$ (de "symmetrische situatie"). De Coulomb afstoting tussen de elektronen zorgt echter voor een heel kleine tendens om toestanden te creëren met parallelle elektron spins. Een eenvoudig maar efficiënt model om dit effect benaderend in rekening te brengen bestaat uit het introduceren van een interactie-energie van de vorm

$$U = \alpha \frac{N_+ N_-}{V} \ ,$$

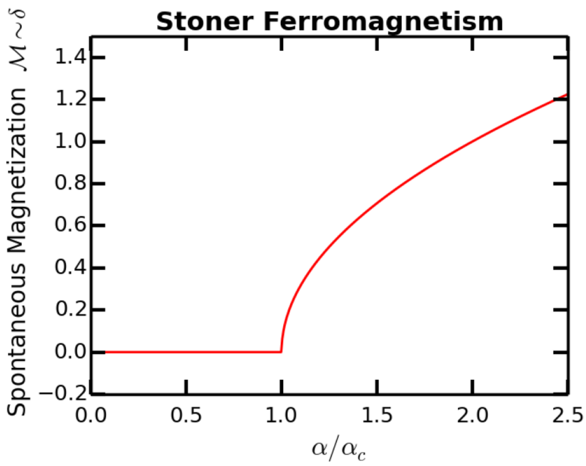
met α een meetbare sterkteparameter en V het volume. We beschouwen niet-relativistiche conductie-elektronen met een kinetische energie gegeven door $\epsilon = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$, met m de elektronmassa.

O2a: De grondtoestand van de conductie-elektronen bevat twee ontaarde Fermi gassen (spin-up elektron gas en spin-down elektron gas). Vind een verband tussen de corresponderende Fermi golfvectoren (k_{F+}, $kF-$) en de dichtheden $\left(\rho_+ = \dfrac{N_+}{V} \ , \rho_- = \dfrac{N_-}{V}\right)$.

O2b: Bereken voor de grondtoestand de bijdrage tot de kinetische energie E_{kin} in termen van de dichtheden $\left(\rho_+ = \dfrac{N_+}{V} \ , \rho_- = \dfrac{N_-}{V}\right)$.

O2c: Veronderstel dat er slechts kleine afwijkingen zijn van de symmetrische situatie $N_+ = N_-$ door te stellen dat $\rho_\pm = \dfrac{\rho}{2} \pm \delta$, met δ een kleine parameter. Expandeer E_{kin} in machten van δ zodat je een nauwkeurigheid bereikt van minstens $\theta(\delta^3)$.

O2d: Vind een uitdrukking voor de kritische waarde α_c van de grootheid α zodat voor $\alpha > \alpha_c$ het elektrongas spontaan een magnetisatie $\mathcal{M}$ ontwikkelt door het ontstaan van een asymmetrische situatie met $N_+ \neq N_-$. Dit fenomeen is gekend als de "Stoner instabiliteit". Toon aan dat $\mathcal{M}$ het geschetste gedrag heeft (zie figuur). [4]



[4] Op het examen waren alle figuren zwart-wit.