

Examen kwantummechanica II

Vrijdag 22 januari 2021

1 Theorie (10/20 ptn.)

1. (5/20 ptn.)
Gegeven zijn

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$
$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

- (a) Leid de commutatierregels af voor de componenten van $\hat{\mathbf{L}}$.
(b) Gebruik deze om \hat{J}^2 en \hat{J}_z te diagonaliseren. Bespreek de representaties in het algemeen.
2. (5/20 ptn.)
(a) Leid de Schrödingervergelijking af voor een deeltje in een elektromagnetisch veld. Gegeven zijn

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right)$$

en

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \text{en} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- (b) Bespreek het ijkprincipe waaraan de Schrödingervergelijking voldoet.

2 Theorie ter vervanging van het mondeling examen (5/20 ptn.)

1. Beantwoord één van de onderstaande vragen naar keuze:
- (a) Bespreek het SG_z na SG_x na SG_z experiment en het verband met superpositie.
OF
- (b) Bespreek de Dirac gatentheorie voor antimaterie.

3 Oefeningen (5/20 ptn.)

1. Spinkoppeling (2.5/20 ptn.)

Beschouw een systeem met twee deeltjes: een deeltje met spin 1 (deeltje 1) en een deeltje met spin 1/2 (deeltje 2). De Hilbertruimte van dit systeem is $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ en de hamiltoniaan is

$$\hat{H} = -2\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$$

met $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$ de totale spin van de 2 deeltjes en $\hat{\mathbf{S}}_1$ en $\hat{\mathbf{S}}_2$ de totale spin van respectievelijk deeltje 1 en deeltje 2.

Hint: paragraaf 2.3.6 en de tabel bovenaan pagina 101 in de cursus kunnen bij deze oefening van pas komen.

- Vind de eigenwaarden en eigenvectoren van deze hamiltoniaan. Specificeer in welke basis je deze Hamiltoniaan diagonaliseert (direct product basis of gekoppelde basis) en motiveer je keuze. Schrijf de eigenvectoren uiteindelijk in beide basissen.
- Gegeven de toestand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1, -\frac{1}{2}\rangle + |-1, +\frac{1}{2}\rangle)$ in de basis bepaald door het tensorproduct van de eigenvectoren van de operatoren \hat{S}_{1z} en \hat{S}_{2z} (de direct product basis). Wat is de verwachtingswaarde van de totale spin in de z-richting (\hat{S}_z). Motiveer of bereken je antwoord.

2. Een Driedimensionale Golf functie (2.5/20 ptn.)

Beschouw de golf functie

$$\psi(r, \theta, \phi) = N \left(1 - \frac{r}{a_0} \sin^2(\theta/2) \right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

met N een normalisatieconstante.

- Bepaal de normalisatieconstante N .
Hint: Denk eraan dat $2\sin^2(\theta/2) = 1 - \cos\theta$
- Is $|\psi\rangle$ een eigentoestand van de Hamiltoniaan van het waterstofatoom? Zoja, wat is de eigenwaarde?
- Wat zijn de mogelijke uitkomsten bij een meting van de operatoren \hat{L}^2 en \hat{L}_z en de bijhorende kansen?