EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA

Maandag 11 januari 2021

eerste bachelor Fysica en Sterrenkunde

- **Vermeld je naam op elk blad.**
- Schrijf je antwoorden op het geruite papier.
  - **Noteer je antwoorden op theorievragen op de dubbelgevouwen bladen.**
  - **Noteer je antwoorden op oefeningen op *aparte*, enkele bladen.**
  - **Dien voor iedere vraag een antwoord in, ook al heb je deze niet opgelost.**
- Leg je studentenkaart (of een ander identificatiebewijs) zichtbaar klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten **volledig uitgeschakeld** zijn.
- Elke **poging** tot spieken kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens.
- Je beschikt over 3 uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle voorgaande deeltjes, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Veel succes!

Theorie

Opgave 1. (4 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(i) In de cursus wordt op verschillende plaatsen het volgende argument gebruikt. Als $V \leq W$ vectorruimten over $\mathbb{R}$ zijn en $\dim(V) = \dim(W)$ dan is $V = W$. Verklaar deze implicatie in detail.

(ii) Geef een bewijs van stelling 6.6.5 (iv): Dus toon aan dat $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ voor alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Zij V een eindig dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $f : V \to V$ een lineaire operator met matrixvoorstellingen A en A' voor verschillende basissen van V. Waarom gelden dan $\dim(im(f)) = rank(A) = rank(A')$ en $\chi_f = \chi_A = \chi_{A'}$ en waarom geldt de equivalentie: f diagonaliseerbaar als en slechts als A is diagonaliseerbaar als en slechts als A' is diagonaliseerbaar?

Oplossing.

(i) Zij $\mathcal{B}$ een basis voor V. Dan is $\mathcal{B}$ een lineair onafhankelijke verzameling van vectoren in W. Er bestaat dus vervolgens Gevolg 2.2.8 een basis $\mathcal{B}'$ van W met $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Omdat $\dim(V) = \dim(W)$ volgt dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. Daarmee volgt $V = \operatorname{span} \mathcal{B} = \operatorname{span} \mathcal{B}' = W$.

(ii) Volgt door uitschrijven van de definities en de lineariteit van de determinant in de tweede rij. We hebben

$$(u+v) \times w = \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} \delta_{i_1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\begin{vmatrix} \delta_{i_1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i_1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right) \cdot e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} \delta_{i_1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot e_i + \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} \delta_{i_1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot e_i = u \times w + v \times w.$$

(iii) Merk eerst in het algemeen op dat als $g : V \to W$ een isomorfisme van vectorruimten is en als $U \leq V$ dan geldt $\dim(\operatorname{im} g(U) = \dim(U)$. Dit volgt omdat als $\mathcal{B}$ een basis is voor U dan is $\{g(b) : b \in \mathcal{B}\}$ een basis voor $g(U)$ en omgekeerd. Het laatste geldt vanwege Stelling 2.4.14 (iii).

Stel nu dat f wordt voorgesteld door A met betrekking tot basissen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ en stel dat $c_{\mathcal{B}}$ en $c_{\mathcal{B}'}$ de bijhorende coördinatenisomorfismen zijn. Dan geldt met Lemma 4.1.4 (ii) dat $\dim(\operatorname{im}(L_A) = \dim(\operatorname{im}(L_A \circ c_{\mathcal{B}}) = \dim(\operatorname{im} c_{\mathcal{B}'} \circ f) = \dim \operatorname{im}(f)$ waarbij de laatste gelijkheid uit onze opmerking volgt. Stel verder dat f wordt voorgesteld door A' met betrekking tot basissen $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Dan volgt analoog $\dim(\mathrm{im}(L_{A'}) = \dim(\mathrm{im}(L_A \circ c_{\mathcal{B}}) = \dim(c_{\mathcal{B}'} \circ f) = \dim \mathrm{im}(f)$.

De definitie van χ_f toont in verband met Lemma 5.1.4 direct aan dat $\chi_f = \chi_A = \chi_{A'}$.

Zij nu $\mathcal{B}$ een willekeurige basis van V met coördinatenisomorfisme $\beta : V \to \mathbb{R}^n$ en zij A de matrixvoorstelling voor f mbt de basis $\mathcal{B}$. Dan geldt: v is een eigenvector van f voor eigenwaarde λ als en slechts als $\beta(v)$ is een eigenvector van A voor eigenwaarde λ. Dan is f diagonaliseerbaar als en slechts als er een basis $b_1, \ldots, b_n$ uit eigenvectoren voor f bestaat voor de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als en slechts als er een basis $\beta(b_1), \ldots, \beta(b_n)$ uit eigenvectoren voor A bestaat voor de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als en slechts als er een matrix $P \in GL_n(\mathcal{B})$ bestaat met $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ als en slechts als A is diagonaliseerbaar. Is A' de matrixvoorstelling voor f mbt de basis $\mathcal{B}'$ dan geldt met hetzelfde argument dat f is diagonaliseerbaar als en slechts als A' is diagonaliseerbaar.

Opgave 2. (2 punten) (i) Zij V een eindigdimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Dan bestaat er een inverteerbare afbeelding P zodat PA een projectie is [dwz $(PA)(PA) = PA$]. (Hint: Men kan zich door de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen laten inspireren.)

Oplossing. Er zijn verschillende manieren om dit op te lossen. In principe past men het bewijs van de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen toe.

Stel dat $v_1, \ldots, v_k$ een basis is voor de kern van A. Deze kan men uitbreiden met bijkomende vectoren $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tot een basis voor V. De restrictie van A op de span van $v_{k+1}, \ldots, v_n$ is injectief. Daarom zijn de vectoren $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ lineair onafhankelijk. Stel $w_i := Av_i$ voor $i = k+1, \ldots, n$. We kunnen $w_{k+1}, \ldots, w_n$ uitbreiden met bijkomende vectoren $w_1, \ldots, w_k$ tot een basis voor V. Definieer nu een lineaire afbeelding P door $Pw_i := v_i$. Dan is P inverteerbaar en $PAv_i = v_i$ voor $i \leq k$ en $PAv_i = 0$ voor $i > k$. Dus $PAPAv_i = PAv_i$ voor alle i en daarmee volgt $PAPAv = PAv$ voor alle $v \in V$ en PA is een projectie. Dit bewijs is in principe een lichte aanpassing van het bewijs van Stelling 2.4.20.

Hier nog een bewijs die een alternatieve pad opgaat.

Stel $v_1, \ldots, v_k$ is een basis voor het beeld van A. Deze kan men uitbreiden met bijkomende vectoren $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tot een basis voor V. Stel $w_1, \ldots, w_k$ zijn vectoren met $Aw_i = v_i$. Dan zijn $w_1, \ldots, w_k$ lineair onafhankelijk. Als namelijk $\lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_n w_n = 0$ dan $0 = F(0) = \lambda_1 Aw_1 + \cdots \lambda_n Aw_n = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n$ en dan moeten alle $\lambda_i = 0$ zijn. We kunnen $w_1, \ldots, w_k$ uitbreiden met bijkomende vectoren $w_{k+1}, \ldots, w_n$ tot een basis voor V.

Dan is de span van $w_{k+1}, \ldots, w_n$ gelijk aan de kern van A. Stel $Aw = 0$ voor $w = \sum_i \lambda_i w_i$. Dan is $Aw = \sum_{i \leq k} \lambda_i v_i$. Dus $\lambda_i = 0$ voor $i \leq k$ en w ligt in de span van $w_{k+1}, \ldots, w_n$. Stel nu $v = Aw_l$ voor een $l > k$. Dan $v = \sum_{i \leq k} \lambda_i v_i = \sum_{i \leq k} \lambda_i A w_i$. Dan is $A(w_l - \sum_{i \leq k} \lambda_i w_i) = 0$ en $w_l - \sum_{i \leq k} \lambda_i w_i$ ligt in de span van $w_{k+1}, \ldots, w_n$. Dan ligt ook $\sum_{i \leq k} \lambda_i w_i$ in de span van $w_{k+1}, \ldots, w_n$. Omdat de w_i een basis vormen volgt $\lambda_i = 0$ voor alle $i \leq k$ en daarmee $v = 0$. Definieer nu $Pv_i := w_i$. Dan is P inverteerbaar en $PAw_i = w_i$ voor $i \leq k$ en $PAw_i = 0$ voor $i > k$. Dus $PAPAw_i = PAw_i$ voor alle i en daarmee volgt $PAPAw = PAv$ voor alle $w \in V$ en PA is een projectie.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Stel $AA = \lambda A$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda \neq 1$. Dan is $I_n - A$ inverteerbaar.

(ii) Zij $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Als $\det(A) \neq 0$ dan geldt $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

(iii) Zij E_{2n} de vectorruimte van alle veeltermen p met reële coëfficiënten van graad kleiner dan $2n$ zodat $p(x) = p(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Stel $n > 1$. Dan is $\dim(E_{2n}) = 2n$.

Oplossing.

(i) Juist. Als $I_n - A$ niet inverteerbaar is dan bestaat er een (nietnul) eigenvector v voor eigenwaarde 1. Dus $Av = v$ en $A^2 v = v$ en $\lambda A v = \lambda v$. Als $\lambda \neq 1$ volgt uit $v = \lambda v$ een contradictie

(ii) Juist. Met Stelling 4.3.13 (i) volgt $A \cdot adj(A) = det(A) I_n$. Dus $det(A) \cdot det(adj(A)) = det(A \cdot adj(A)) = det(det(A) I_n) = det(A)^n$. Daaruit volgt $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$ omdat $det(A) \neq 0$.

(iii) Fout. De dimensie van E_{2n} is n en een basis wordt gegeven door x^{2i} voor $1 \leq i \leq n$. Voor $n \geq 1$ is $n < 2n$.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 4. (5 punten) Zij $V = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de vectorruimte van veeltermen over $\mathbb{R}$ van graad kleiner dan 3. Voor elke $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beschouwen we de afbeelding:

$$f_{\lambda,\mu} : V \to V : a + bx + cx^2 \mapsto \lambda(b + c) + \mu(a + c)x + (a + b)x^2.$$

(i) Toon aan dat $f_{\lambda,\mu}$ een lineaire afbeelding is.

(ii) Bepaal $\ker f_{\lambda,\mu}$ en $\operatorname{im} f_{\lambda,\mu}$ voor elke waarde van λ en μ.

(iii) Zij $\lambda \neq 0$. Bepaal $f_{\lambda,\lambda}^{-1}$.

Oplossing.

(i) Voor de basis $\{1, x, x^2\}$ van V vinden we duidelijk de matrixrepresentatie

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \mu & 0 & \mu \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

voor $f_{\lambda,\mu}$. Hieruit volgt automatisch de lineariteit van $f_{\lambda,\mu}$.

(ii) We hebben

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \mu & 0 & \mu \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda\mu,$$

zodat $f_{\lambda,\mu}$ inverteerbaar is als en slechts als $\lambda \neq 0 \neq \mu$. In dit geval is dan $\ker f_{\lambda,\mu} = \{0\}$ en $\operatorname{im} f_{\lambda,\mu} = V$. We overlopen nu de overige gevallen.

We hebben dat $f_{0,0}(a+bx+cx^2) = (a+b)x^2$. Hieruit volgt $\ker f_{0,0} = \langle 1 - x, x^2 \rangle$ en $\operatorname{im} f_{0,0} = \langle x^2 \rangle$.

Voor $\mu \neq 0 = \lambda$ hebben we dat $f_{0,\mu}(a+bx+cx^2) = \mu(a+c)x+(a+b)x^2$. Hierdoor is duidelijk $\operatorname{im} f_{0,\mu} = \langle x, x^2 \rangle$. Als $f_{0,\mu}(a+bx+cx^2) = 0$, dan moet $a = -b = -c$. Bijgevolg is $\ker f_{0,\mu} = \langle 1 - x - x^2 \rangle$.

Voor $\lambda \neq 0 = \mu$ hebben we dat $f_{\lambda,0}(a+bx+cx^2) = \lambda(b+c)+(a+b)x^2$. Hierdoor is duidelijk $\operatorname{im} f_{\lambda,0} = \langle 1, x^2 \rangle$. Als $f_{\lambda,0}(a+bx+cx^2) = 0$, dan moet $a = -b = c$. Bijgevolg is $\ker f_{\lambda,0} = \langle 1 - x + x^2 \rangle$.

(iii) Als $\lambda \neq 0$, dan is $f_{\lambda,\lambda}$ wegens deel *(ii)* inverteerbaar. We zoeken de inverse matrix van

$$A_{f_{\lambda,\lambda}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dewelke determinant $2\lambda^2$ heeft. Wegens Stelling 4.3.13(ii) volgt dat

$$A^{-1}_{f_{\lambda,\lambda}} = \frac{1}{2\lambda^2}\,\mathrm{adj}(A_{f_{\lambda,\lambda}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\lambda} & -\frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} &f^{-1}_{\lambda,\lambda}(a+bx+cx^2) \\ &\qquad = \frac{1}{2\lambda}\left[(-a+b+\lambda c)+(a-b+\lambda c)x+(a+b-\lambda c)x^2\right]. \end{aligned}$$

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 5. (5 punten) We definiëren de Fibonacci getallen als $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ en vervolgens recursief als $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$.

(i) Toon de volgende gelijkheid aan:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \qquad n \geq 1.$$

(ii) Bewijs de formule van Cassini:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad n \geq 1.$$

(iii) Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimtes van $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

(Hint: maak gebruik van de gulden snede $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

Oplossing.

(i) We bewijzen dit via inductie op $n \geq 1$. Voor het geval $n = 1$ hebben we dat $F_2 = F_1 + F_0 = 1$, waaruit het gestelde onmiddellijk volgt. Veronderstel nu dat voor willekeurige $n \geq 1$ de formule

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \qquad n \geq 1$$

geldt. Dan hebben we

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_n+F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

zodat de formule ook geldig is in het geval $n+1$.

(ii) Merk op dat

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Aangezien de determinant van een product van matrices gelijk is aan het product van determinanten, volgt dan

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)^n = (-1)^n.$$

(iii) Zij A een matrix en v een eigenvector van A behorende bij de eigenwaarde λ. Dan is v een eigenvector van A^n behorende bij de eigenwaarde λ^n, voor iedere $n \geq 1$ (zie Oefening 5.8). We kijken dus eerst naar de eigenwaarden van $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. We hebben dat

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \phi \text{ of } \lambda = \phi - \sqrt{5}.$$

De eigenwaarden van $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ zijn dus ϕ^n en $(\phi - \sqrt{5})^n$. De eigenruimte behorende bij ϕ^n is gelijk aan de eigenruimte behorende bij ϕ van $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, en een simpele berekening toont aan dat dit juist $\langle (1, 1 + \frac{1}{\phi})^t \rangle$ is. Analoog toont men aan dat de eigenruimte behorende bij $(\phi - \sqrt{5})^n$ juist $\langle (1, 1 + \frac{1}{\phi - \sqrt{5}})^t \rangle$ is.