EXAMEN RELATIVITEITSTHEORIE (27/01/2021)

- de totale examentijd bedraagt drie uur.
- maak eerst het theorie-examen (**gesloten boek**), nadat je jouw theorie-examen hebt afgegeven kan je beginnen aan de oefeningen (**open boek**).
- schrijf op elk antwoordblad (geruite bladen) duidelijk je naam en richting. Kladpapier wordt niet bekeken bij de verbetering.

A. Theorie (20 punten)

1. Relativistisch testdeeltje in een elektromagnetisch veld (**8 punten**).
   - Leid de manifest covariante bewegingsvergelijkingen af in de Minkowski ruimte-tijd, gegeven de volgende actie voor een deeltje met massa m en lading e (en met $ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}$):
   $$S = -mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_\mu dx^\mu$$
   - Beschouw een neutraal vrij deeltje A (met lading $e = 0$) en een geladen deeltje B die op eenzelfde plek vertrekken en elkaar even later terug tegenkomen. Voor welk van de twee deeltjes verstreek hierbij de meeste tijd?
2. Equivalentieprincipe en gravitationele roodverschuiving (**5 punten**).
   - Na de corona-miserie gaan we terug op café kunnen gaan. Hou zou je dan op café het equivalentieprincipe uitleggen aan uw vrienden die geen fysica achtergrond hebben. (Enkele zinnen volstaan)
   - Gebruik nu het equivalentieprincipe om de uitdrukking af te leiden voor de gravitationele roodverschuiving in een algemeen (zwak) gravitatieveld, met Newtoniaanse potentiaal ϕ. Gegeven: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c}$ voor de longitudinale Dopplerverschuiving bij kleine v.
3. Krommingstensor metriek (**1 punt**)

   Wat is de Ricciscalair voor de volgende metriek:
   $$ds^2 = c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

4. Ijksymmetrie zwakke-veld limiet Einstein vergelijking **(2,5 punten)**

   In de zwakke-veld limiet heeft de Einstein vergelijking een ijksymmetrie voor de metriek-perturbatie $h_{\mu\nu}$ van de vorm: $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \ldots$. Leidt de expliciete vorm van deze symmetrie af.

5. Het covariant behoud van energie voor een alternatieve gravitatietheorie **(3,5 punten)**

   In 1980 stelde Aleksei Starobinsky een modificatie van de Einstein-vergelijking voor, die leidt tot inflatie in het jonge universum. Expliciet schreef hij:

$$G_{\mu\nu} + k_2 H_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}\,,$$

   met k_2 een constante en,

$$H_{\mu\nu} = 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 + 2(g_{\mu\nu}D_\rho D^\rho R - D_\mu D_\nu R)\,.$$

   Toon aan dat ook deze gewijzigde zwaartekracht vergelijking consistent is met het covariant behoud van energie/impuls. Beschouw hierbij het covariant behoud voor de Einstein-tensor $G_{\mu\nu}$ als bewezen. Je zal ook gebruik kunnen maken van:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma\,.$$

B. Oefeningen (10 punten)

1. Botsing identieke deeltjes (**4,5 punten**)

   Een deeltje met massa m botst elastisch met een stationair deeltje met dezelfde massa. Het inkomende deeltje heeft een kinetische energie $T_0(= E - mc^2)$. Wat is de kinetische energie van dit deeltje na de botsing als de verstrooiingshoek θ is?

2. Geodetische baanvergelijking voor een tweedimensionale ruimtetijd. (**5,5 punten**)

   Beschouw de volgende metriek (en neem voor het gemak $c = 1$) in de 2d-ruimtetijd geparametriseerd door $(x^0, x^1) = (t, x)$:

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(dt^2 - dx^2)$$

- Bereken expliciet de Christoffelsymbolen $\Gamma^1_{\mu\nu}$ en gebruik deze om de 1- component van de geodetische vergelijking (voor een massief deeltje) expliciet uit te schrijven: $\frac{dU^1}{d\tau} + \Gamma^1_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0$.
- Toon uit deze vergelijking aan dat voor een algemene geodeet geldt dat:
$$U^1 \equiv \frac{dx}{d\tau} = \alpha t^2 \,,$$
met een integratieconstante α.
- Gebruik dit om aan te tonen dat (met $c = 1!$):
$$U^0 \equiv \frac{dt}{d\tau} = \pm\sqrt{\alpha^2 t^4 + t^2} \,.$$
- Bekom tenslotte de algemene vorm voor de geodetische baanvergelijking $x(t)$, waarbij je kan gebruik maken van de integraal:
$$\int dt \frac{t^2}{\sqrt{At^4 + t^2}} = \frac{\sqrt{At^4 + t^2}}{At}$$