Statistiek I, Bachelor Wiskunde (Prof. C. Ley)
Examen Januari 2021

Tussen haakjes staan de indicatieve punten. Veel succes !

Vraag 1 (10 punten)

Beantwoord volgende vragen met JA/NEE en een heel korte motivatie (max 2 lijnen per vraag). Het juiste antwoord alleen geeft 0 punten, het juiste antwoord met approximatieve verklaring 1 punt en het juiste antwoord met juiste verklaring de volledige 2 punten per vraag.

(a) Stel X en Y onafhankelijk van elkaar. Dan is de marginale dichtheidsfunctie van X gelijk aan de conditionele dichtheidsfunctie van X gegeven Y.

(b) Zij f and g dichtheidsfuncties. Dan is $\alpha f + \beta g$ een geldige dichtheidsfunctie $\Longleftrightarrow \alpha + \beta = 1$.

(c) $\text{Var}[X+Y+Z] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y+Z]$ geldt enkel als X onafhankelijk is van de som $Y+Z$.

(d) De maximum likelihood schatters zijn steeds verschillend van schatters bekomen via de momentenmethode.

(e) Convergentie in kans impliceert steeds convergentie in verdeling, en nooit anders om.

Vraag 2 (15 punten)

Toon aan dat asymptotisch onvertekende schatters met asymptotisch naar 0 convergerende variantie noodzakelijk consistente schatters zijn.
Hint : maak gebruik van de ongelijkheid van Markov.

Vraag 3 (50 punten)

Zij $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ onafhankelijke en identiek verdeelde koppels van realisaties van de stochastische veranderlijken (X, Y) met dichtheidsfunctie

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi} y \exp(-y) \exp\left(-\frac{\lambda y (x-\mu)^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, y \in [0, \infty),$$

waar $\lambda > 0$ en $\mu \in \mathbb{R}$ de onbekende parameters zijn.

(a) Toon aan dat Y Gamma-verdeeld is en dat $\text{E}[Y] = 3/2$.
Hint : de Gamma functie is gedefinieerd als $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ en $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ voor $z \geq 1$ en $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(b) Toon aan dat X conditioneel op Y een normale verdeling volgt.

(c) Bepaal $\text{E}[XY]$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(XY, Y)$ en $\text{Var}(XY)$.

(d) Stel $Z = \sqrt{\lambda Y} X + \left(1 - \sqrt{\lambda Y}\right) \mu$. Is Z afhankelijk van Y ? Zo ja/nee, toon aan.

(e) Bepaal de verdeling van het steekproefgemiddelde $\overline{Y}_n$.

(f) Wat zijn de maximum likelihood schatters van μ en λ ?

(g) Is $\hat{\mu}_{MLE}$ een consistente schatter voor μ ?

(h) Wat is de asymptotische verdeling van $\hat{\mu}_{MLE}$?

(i) Bepaal

$$\text{P}\left(\sum_{i=1}^{5} i(X_i - \mu)^2 < \frac{1}{\lambda} \,\Big|\, \bigcap_{1 \leq i \leq 5} (Y_i = i)\right).$$

VRAAG 4 (25 punten)

In deze oefening wensen we de verloop van een virale ziekte te berekenen. Hiervoor veronderstellen we een oneindig grote populatie van (nog) gezonde mensen en n zieke personen. Elke ziek persoon ontmoet per dag P gezonde personen, waar P een Poisson verdeling met parameter $\lambda > 0$ volgt. Ieder contact leidt tot een besmetting van de gezonde persoon met kans $p \in [0, 1]$, en dit onafhankelijk van de andere contacten. Elke nieuw besmette persoon kan ook direct de daaropvolgende dag een gezonde besmetten. We veronderstellen hier dat een zieke persoon de hele tijd ziek en besmettelijk blijft. We veronderstellen ook dat de zieke personen enkel gezonde personen ontmoeten en dat geen gezonde persoon twee zieke personen per dag ontmoet.

(a) Toon aan dat de hoeveelheid mensen dat 1 zieke persoon op 1 dag besmet Poisson-verdeeld is.

(b) Zij W_i het aantal besmette personen op het einde van dag i (dus $W_0 = n$) en Z_i het aantal nieuwe zieken na dag i. Toon dat de verdeling van $Z_i|W_{i-1}$ de Poisson($W_{i-1}p\lambda$) is.

(c) Bereken $\mathrm{E}[W_i]$, het verwacht aantal zieke personen na dag i.

(d) Nu wensen we het effect van quarantaine te bekijken. Hierbij gaan we ervan uit dat een persoon die besmet is geraakt, na T dagen positief test en zich de volgende dag in quarantaine zet, hierbij wordt T gemeten vanaf de eerste dag dat deze personen zelf besmettelijk zijn. Hier volgt T een exponentiële verdeling met gemiddelde tijd van 5 dagen. Uiteraard kunnen personen in quarantaine niet meer andere mensen infecteren. Toon aan dat nu $\mathrm{E}[W_i] = n(\lambda p + e^{-1/5})^i$ is.
Hint : denk aan de speciale eigenschap van de exponentiële verdeling.

(e) Men wil zowel het gebruik van een mondmasker als de quarantaine gebruiken om ervoor te zorgen dat het gemiddelde aantal besmettelijke mensen elke dag daalt. Mondmaskers dragen leidt tot een kleinere kans van besmetting, dus p wordt veranderd naar $p\rho$ met $\rho \in (0, 1)$. De uitdrukking voor $\mathrm{E}[W_i]$ van de vorige vraag kan dus gemakkelijk worden aangepast. Bepaal de maximale waarde van ρ, afhankelijk van de parameters n, p, λ, waarvoor het gemiddelde aantal besmettelijke mensen per dag afneemt.