Opgaven

Opgave 1 (5 punten).
Zij L een taal (van eerste orde) en zij T een L-theorie. Zij K de klasse van de modellen van T. Stel dat er een eindige L-theorie Δ bestaat zodat K de klasse van de modellen van Δ is.

Toon aan dat er een eindige L-theorie $T' \subseteq T$ bestaat zodat K de klasse van de modellen van T' is.

Opgave 2 (5 punten).
Zij L een taal (van eerste orde) en zij T een L-theorie. Zij φ een L-zin met $T \nvdash \varphi$.

Toon aan dat er een volledige, formeel consistente theorie T' bestaat zodat $T \subseteq T'$ en $T' \vdash \neg\varphi$.

Opgave 3 (5 punten).
Het *symmetrisch verschil* $X \triangle Y$ van twee verzamelingen X en Y wordt gedefinieerd als $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Definieer een relatie $\overset{\triangle}{\sim}$ op $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ als volgt: voor elke twee verzamelingen $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ geldt dat

$$X \overset{\triangle}{\sim} Y \quad \Leftrightarrow \quad X \triangle Y \text{ is aftelbaar.}$$

(1) Bewijs dat de relatie $\overset{\triangle}{\sim}$ een equivalentierelatie is.
(2) Bepaal de kardinaliteit van elke equivalentieklasse.
(3) Bepaal de kardinaliteit van de verzameling van alle equivalentieklassen.

Opgave 4 (5 punten).
(1) Schrijf het bewijs van de correctheidstelling uit voor het geval $(\rightarrow E)$. Schenk daarbij aandacht aan de mogelijks optredende variabelen.
(2) Op pagina 85 (bewijs van Stelling 2.7.10) staat: k is deelring van k' en k en k' zijn algebraïsch gesloten, bijgevolg is k een elementaire substructuur van k'.
Waarom is dat zo? Waarom is daarvoor nodig dat k en k' zijn algebraïsch gesloten zijn?
(3) Stel een gedecoreerde bewijsboom op voor $\neg\neg\forall x\phi(x) \rightarrow \forall x\neg\neg\phi(x)$ zonder de bewijsregel $(\bot E)$ toe te passen.