Overzicht Definities

Door Niels Carlier, naar de syllabus van Prof. Hans Vernaeve

Eerste Bachelor Fysica en Sterrenkunde
Vectoranalyse 2020-2021

1 Hoofdstuk 1

1. **Open bal:** De open bal met middelpunt $\vec{a}$ en straal $R > 0$ wordt gedefinieerd door:
$$B(\vec{a}, R) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < R\}$$
2. **Omgeving:** Een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is een omgeving van het punt $\vec{a}$, en $\vec{a}$ zelf is een **inwendig punt** van V, als:
$$\exists R > 0 : B(\vec{a}, R) \subseteq V$$
3. **Inwendige:** het inwendige $\mathring{V}$ van een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is de verzameling van alle inwendige punten van V.[1]
4. **Doorprikte omgeving:** Is $V \subseteq \mathbb{R}^n$ een omgeving van $\vec{a}$, dan noemt men $V \setminus \{\vec{a}\}$ een doorprikte omgeving van $\vec{a}$.
5. **Open verzameling:** Een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heet open als alle punten van V inwendig zijn.
6. **Gesloten verzameling:** Een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is gesloten als haar complement $\mathbb{R}^n \setminus V$ open is.
7. **Begrensde verzameling:** Een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is begrensd als:
$$\exists R > 0 : V \subseteq B(\vec{0}, R)$$
8. **Compacte verzameling:** Een verzameling heet compact als ze tegelijk begrensd en gesloten is.
9. **Adherent punt:** We noemen $\vec{a}$ een adherent punt van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (waartoe het niet hoeft te behoren) als:
$$\forall R > 0 : B(\vec{a}, R) \cap V \neq \varnothing$$
10. **Sluiting:** De sluiting $\overline{V}$ van een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is de verzameling van alle adherente punten van V.
11. **Ophopingspunt:** We noemen $\vec{a}$ een ophopingspunt van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als:
$$\forall R > 0 : \varnothing \neq B(\vec{a}, R) \cap V \neq \{\vec{a}\}$$
12. **Gesloten bal:** De gesloten bal met middelpunt $\vec{a}$ en straal $R > 0$ is gedefinieerd als:
$$\overline{B}(\vec{a}, R) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq R\}$$
13. **Geïsoleerd punt:** een geïsoleerd punt van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is een punt dat tot V behoort maar er geen ophopingspunt van is.
14. **Grens/Rand:** De grens of rand van een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is de verzameling $\overline{V} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus V}$, genoteerd als ∂V.
15. **Diameter:** De diameter van een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door:
$$diam(V) = \sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : (\vec{x}, \vec{y}) \in V \times V\}$$
16. **Rij:** Een rij in $\mathbb{R}^n$ is een functie f die elk natuurlijk getal vanaf een zekere k_0 (doorgaans 0 of 1) afbeeldt op een element van $\mathbb{R}^n$. Een rij in $\mathbb{R}^n$ is dus een bijzonder geval van een $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ functie.

[1] Uiteraard: $\mathring{V} \subseteq V$.

17. Afstand: De afstand tussen twee nietledige verzamelingen A en B is gegeven door:

$$d(A,B) = \inf\{\|\vec{x}-\vec{y}\| : \vec{x} \in A, \vec{y} \in B\} \in [0, +\infty[$$

18. Limiet: Zij f een $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ functie met domein D, en zij $\vec{a}$ een ophopingspunt van D, dan is L de limiet van f voor $\vec{x}$ naderend tot $\vec{a}$ als:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(0 < d(\vec{x},\vec{a}) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon)$$

met $\vec{x} \in D$.

19. Continu: Zij f een $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ functie met domein D, en zij $\vec{a}$ een niet-geïsoleerd punt van D. We zeggen dat f continu is in $\vec{a}$ als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < d(\vec{x},\vec{a}) < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon)$$

met $\vec{x} \in D$.

20. Gesloten lijnstuk: Het gesloten lijnstuk met beginpunt $\vec{x}$ en eindpunt $\vec{y}$ is de verzameling:

$$[\vec{x},\vec{y}] = \{(1-t)\vec{x} + t\vec{y} \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

21. Open lijnstuk: Het open lijnstuk met beginpunt $\vec{x}$ en eindpunt $\vec{y}$ is de verzameling:

$$]\vec{x},\vec{y}[= \{(1-t)\vec{x} + t\vec{y} \mid 0 < t < 1\} = [\vec{x},\vec{y}] \setminus \{\vec{x},\vec{y}\}$$

22. Gebroken lijn: Een gebroken lijn is de vereniging van een eindig aantal gesloten lijnstukken, waarbij het eindpunt van het ene lijnstuk samenvalt met het beginpunt van het volgende lijnstuk.

23. Open gebied: Een open gebied is een open verzameling G met de bijkomende eigenschap dat elk tweetal punten in G 'verbonden' kan worden door een gebroken lijn die volledig in G ligt.

24. Gebied: Een gebied is de vereniging van een open gebied met een deel (eventueel leeg) van zijn rand.[2]

25. Afleidbaarheid (in twee veranderlijken): Zij f een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie met domein D, en zij (a,b) een inwendig punt van D zodat voor $\|\vec{h}\|$ voldoende klein ook $(a+h_1, b+h_2) \in D$. We zeggen dat f in (a,b) afleidbaar is als er reële getallen α, β en een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie r bestaan waarvoor:

$$f(a+h_1, b+h_2) = f(a,b) + \alpha h_1 + \beta h_2 + \|\vec{h}\| r(h_1,h_2)$$

met $r(\vec{h}) \to 0$ voor $\vec{h} \to \vec{0}$.

26. Partieel afgeleide: De getallen α en β in definitie 25 noemt men de partieel afgeleiden van de functie f naar x en y respectievelijk.[3] Deze partieel afgeleiden zijn gegeven door:

$$\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
$$\beta = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

27. Glad: Een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie f met domein D heet glad of van **klasse** C^1 over de open verzameling $G \subseteq D$ als haar partieel afgeleide functies $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bestaan en continu zijn over G.[4]

28. Afleidbaarheid (in $n \geq 2$ veranderlijken:) Zij f een $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ functie met domein D en zijn $\vec{a}$ een inwendig punt van D, zodat voor $\|\vec{h}\|$ voldoende klein ook $\vec{a} + \vec{h} \in D$. Nu is f afleidbaar in $\vec{a}$ als er constanten $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en een $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ functie r bestaan waarvoor:

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + \alpha_1 h_1 + ... + \alpha_n h_n + \|\vec{h}\| r(\vec{h})$$

met $r(\vec{h}) \to 0$ voor $\vec{h} \to \vec{0}$. Als de constanten α_i bestaan, zijn ze uniek en gegeven door:

$$\alpha_i = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h_i, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$$

[2] Een gebied mag gaten vertonen.

[3] Ervan uitgaande dat we de eerste veranderlijke met x en de tweede met y noteren.

[4] De klasse C^m ($m \in \mathbb{N}$) wordt dan analoog gedefinieerd: functies van deze klasse over G hebben bestaande en continue partieel afgeleide functies tot en met de m^e orde over G.

29. Vectorwaardige functie: Een functie $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ noemt men een vectorwaardige functie.[5]

30. Richtingsafgeleide: Zij f een $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ functie en $\vec{a}$ een inwendig punt van haar domein. Zij $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en $\|\vec{v}\| = 1$. We definieren de richtingsafgeleide van f in $\vec{a}$ in de richting $\vec{v}$ als:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h} \in \mathbb{R}$$

31. Gradiënt: Met een scalairenveld f associeert men het vectorveld:

$$(\nabla f)(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

in die punten $\vec{x}$ waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Dit vectorveld noemt men de gradiënt van f in $\vec{x}$.[6]

32. Divergentie: Met een vectorveld $\vec{F} = (F_1, ..., F_n)$ (de F_j zijn $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ functies) associeert men het scalairenveld:

$$(\nabla \cdot \vec{F})(\vec{x}) = div(\vec{F})(\vec{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\vec{x})$$

in die punten $\vec{x}$ waar de gebruikteb afgeleiden bestaan. Dit scalairenveld noemt men de divergentie van $\vec{F}$ in $\vec{x}$.[7]

33. Rotor $(n = 3)$: Met $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ duiden we de standaardbasis in $\mathbb{R}^3$ aan. Met het vectorveld $\vec{F} = (P, Q, R)$ associeert men het vectorveld:

$$(\nabla \times \vec{F})(x, y, z) = rot(\vec{F})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

in die punten (x, y, z) waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Men noemt dit vectorveld de rotor van $\vec{F}$ in (x, y, z).[8]

34. Laplaciaan: Met een scalairenveld $f(\vec{x})$ associeert men het scalairenveld;

$$(\nabla^2 f)(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x})$$

in die punten $\vec{x}$ waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Men noemt $(\nabla^2 f)(\vec{x})$ de laplaciaan van f in $\vec{x}$.[9]

35. Operatoren: Een **scalairwaardige operator** is een functie die een scalairenveld f of een vectorveld $\vec{F}$ afbeeldt op een scalairenveld.
Een **vectorwaardige operator** is een functie die een scalairenveld f of een vectorveld $\vec{F}$ afbeeldt op een vectorveld.
We kunnen de **som** van twee operatoren D, E van *hetzelfde type* 'puntsgewijs' definiëren:

$$(D + E)(f) = D(f) + E(f)$$

evenals het **product** van een vectorveld $\vec{F}$ met een scalairwaardige operator D:

$$(\vec{F}D)(f) = \vec{F}D(f)$$

en analoog voor andere bewerkingen.

[5] Een eigenschap die voor elke projectie f_j geldt noemen we een eigenschap van $\vec{f}$.
[6] Deze geeft de *direction of steepest ascent*.
[7] Kan je interpreteren als weergevende of $\vec{F}$ in $\vec{x}$ een *zinkgat* of een *bron* heeft.
[8] Legt in zekere zin de mate vast waarin het vectorveld $\vec{F}$ roteert in het beschouwde punt.
[9] Wordt ook als Δf genoteerd en is in feite de divergentie van de gradiënt.

2 Hoofdstuk 2

1. **Jacobiaanse matrix**: Een vectorwaardige functie $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, met $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$, is afleidbaar in een inwendig punt $\vec{a}$ van haar domein juist als elke component afleidbaar is in $\vec{a}$, nl. als voor elke $i = 1, ..., m$ en voor elke $\vec{h} = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ met $\|\vec{h}\|$ voldoende klein geldt:
$$f_i(\vec{a}+\vec{h}) = f_i(\vec{a}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\vec{a}) \cdot h_1 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\vec{a}) \cdot h_n + \|\vec{h}\| r_i(\vec{h})$$
met $r_i(\vec{h}) \to 0$ voor $\vec{h} \to \vec{0}$. Met behulp van het matrixproduct kunnen we dit herschrijven als:
$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{a}+\vec{h}) \\ . \\ . \\ . \\ f_m(\vec{a}+\vec{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{a}) \\ . \\ . \\ . \\ f_m(\vec{a}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{bmatrix} + \|\vec{h}\| \begin{bmatrix} r_1(\vec{h}) \\ . \\ . \\ . \\ r_m(\vec{h}) \end{bmatrix}$$
met opnieuw $r_i(\vec{h}) \to 0$ voor $\vec{h} \to \vec{0}$. De matrix die de partiele afgeleiden van $\vec{f}$ in $\vec{a}$ bevat noemt men de Jacobiaanse matrix van $\vec{f}$ in $\vec{a}$, aangeduid met $D\vec{f}(\vec{a})$. Als $m = n$, dan noemt men $\det(D\vec{f}(\vec{a}))$ de **Jacobiaanse determinant** van $\vec{f}$. [10]

2. **C^k-diffeormorfisme:** Een C^k-diffeomorfisme van $G_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ op $G_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ (G_1 en G_2 zijn open) is een bijectie $\vec{f}: G_1 \to G_2$ waarvoor zowel $\vec{f}$ als diens inverse $\vec{f}^{-1}: G_2 \to G_1$ van de klasse C^k zijn.

3. **Lokaal C^k-diffeormorfisme:** Een $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ functie $\vec{f}$ is een lokaal C^k-diffeomorfisme in $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ als:

   1 $\vec{f}$ is een bijectie van een omgeving W_1 van $\vec{a}$ naar een omgeving W_2 van $\vec{f}(\vec{a})$.

   2 $\vec{f}$ is van de klasse C^k op een omgeving U_1 van $\vec{a}$

   3 $\vec{f}^{-1}$ is van de klasse C^k op een omgeving U_2 van $\vec{f}(\vec{a})$.

3 Hoofdstuk 3

1. **Gladde kromme:** Een gladde kromme in $\mathbb{R}^2$ is een deelverzameling Γ van $\mathbb{R}^2$ die geschreven kan worden als $\Gamma = \vec{\varphi}[a, b]$, waarbij $\vec{\varphi}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ aan de volgende eigenschappen voldoet:

   1 $\vec{\varphi}$ is een bijectie van $[a, b]$ op Γ.

   2 $\vec{\varphi} \in C^1[a, b]$.

   3 $\vec{\varphi}'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a, b]$

   We noemen $\vec{\varphi}$ een **parametervoorstelling** van de kromme Γ. Voor een $t_0 \in [a, b]$ is $\vec{\varphi}'(t_0)$ de **raakvector** aan Γ in het punt $\vec{\varphi}(t_0) \in \Gamma$.

2. **Overgang:** Zij $\vec{\varphi}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ en $\vec{\psi}: [c, d] \to \mathbb{R}^2$ twee parametervoorstellingen van eenzelfde kromme Γ. Zij $\theta: [a, b] \to [c, d]$ de unieke functie zodat $\vec{\varphi} = \vec{\psi} \circ \theta$, dan noemen we θ de overgang van $\vec{\varphi}$ naar $\vec{\psi}$. [11]
   Twee parametervoorstellingen van eenzelfde kromme noemen we **gelijk georiënteerd** als de overgang tussen beide strikt stijgend is, en **tegengesteld georiënteerd** als de overgang tussen beide strikt dalend is.

3. **Booglengte:** Zij Γ een gladde kromme met parametervoorstelling $\vec{\varphi}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$, dan is de (boog)lengte van Γ:
$$\wedge(\Gamma) = \int_a^b \|\vec{\varphi}'(t)\| dt$$

[10] Afleidbaarheid van $\vec{f}$ in $\vec{a}$ kan dan beknopt vectorieel genoteerd worden.
[11] Merk op dat het gaat om een symmetrische relatie.

4. **Lijnintegraal van een continu scalairenveld:** Zij Γ een gladde kromme met parametervoorstelling $\vec{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, en zij $f(x,y)$ een scalairenveld dat continu is over Γ, dan is de lijnintegraal van $\vec{f}$ langs Γ:
$$\int_\Gamma f(x,y)ds = \int_a^b f(\vec{\varphi}(t))\|\vec{\varphi}'(t)\|dt$$

5. **Lijnintegraal langs een continu vectorveld:** Zij Γ een gladde kromme met parametervoorstelling $\vec{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ en zij $\vec{F}(x,y)$ een vectorveld dat continu is over Γ, dan is de lijnintegraal van $\vec{F}$ langs Γ:
$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt$$

6. **Stuksgewijze gladde kromme:** Een stuksgewijze gladde kromme is een deel van $\mathbb{R}^2$ dat te schrijven is als $\vec{\varphi}_1[a_1,b_1] \cup ... \cup \vec{\varphi}_N[a_N,b_N]$ waarbij elke $\vec{\varphi}_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{R}^2$ een parametervoorstelling van een gladde kromme is en waarvoor elk eindpunt $\vec{\varphi}_i(b_i)$ samenvalt met het volgende beginpunt $\vec{\varphi}_{i+1}(a_{i+1})$.[12]

7. **Lijnintegraal langs een stuksgewijze gladde kromme:** De lijnintegraal van een continu *scalairenveld* langs een stuksgewijze gladde kromme is de som van de lijnintegralen langs de gladde krommen waaruit de stuksgewijze gladde kromme bestaat.
De lijnintegraal van een continu *vectorveld* langs een stuksgewijze gladde kromme is de som van de lijnintegralen langs de gladde krommen waaruit de stuksgewijze gladde kromme bestaat, waarbij telkens het eindpunt van de ene gladde kromme moet samenvallen met het beginpunt van de volgende gladde kromme.

8. **Wervelvrij vectorveld:** Zij $E \subseteq \mathbb{R}^2$ een open gebied zonder gaten, en zij (P,Q) een vectorveld gedefinieerd in E. We noemen (P,Q) wervelvrij als het continu is en als:
$$\int_\Delta P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$
voor elke gesloten[13] gebroken lijn Δ in E die bestaat uit drie lijnstukken.

4 Hoofdstuk 4

1. **Partitie:** Beschouw in $\mathbb{R}^2$ een open rechthoek:
$$R = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$
en f een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie, over R gedefinieerd en begrensd. Een partitie Δ van R is het carthesiaans product van een partitie π_x van $[a,b]$ en een partitie π_y van $[c,d]$, en bestaat dus uit een eindig aantal punten $(x_0,y_0), ..., (x_p,y_q)$ waarvoor:
$$a = x_0 < ... < x_p = b, c = y_0 < ... < y_q = d$$
De partitie leidt tot een opsplitsing van R in open rechthoeken $R_{ij} =]x_i, x_{i+1}[\times], y_j, y_{j+1}[$, en we definiëren:
$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$$
$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$$
$$O_{ij} = Opp(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$
We identificeren vaak de partitie Δ met de verzameling van rechthoeken R_{ij}.

2. **Boven- en ondersom:** Met de partitie Δ associeert men de bovensom S_Δ en de ondersom s_Δ, respectievelijk:
$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{ij}O_{ij} \ , \ s_\Delta = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m_{ij}O_{ij}$$

[12]Merk op dat een **gesloten stuksgewijze gladde kromme** kan bestaat, maar dat dit betekent dat het eerste beginpunt $\vec{\varphi}_1(a_1)$ samenvalt met het laatste eindpunt $\vec{\varphi}_N(b_N)$.
[13]Zie eerdere voetnoot over de contextuele betekenis van het woord 'gesloten'.

3. **Boven- en onderintegraal:** De boven- en onderintegraal van f over R definieert men respectievelijk als:
$$\overline{\iint_R} f(x,y)dxdy = \inf_{\Delta}(S_\Delta) \ , \ \underline{\iint_R} f(x,y)dxdy = \sup_{\Delta}(s_\Delta)$$

4. **Dubbelintegraal:** De functie f noemt men (Riemann-)integreerbaar over R als:
$$\overline{\iint_R} f(x,y)dxdy = \underline{\iint_R} f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy$$
Deze laatste term noemt men de (dubbel)integraal van f over R.

5. **Nulverzameling:** Een verzameling $X \subseteq \mathbb{R}^2$ noemt men een nulverzameling als er voor elke $\varepsilon > 0$ een eindig aantal of een rij rechthoeken $R_1, R_2, ...$ met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen bestaat zodat:

   1 $X \subseteq R_1 \cup R_2 \cup ...$

   2 $Opp(R_1) + Opp(R_2) + ... < \varepsilon$

6. **Bijna overal continu:** Een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie f, gedefinieerd over de rechthoek R noemt men bijna overal continu als:
$$\{(x,y) \in R : f_{|R} \ is\ discontinu\ in\ (x,y)\}$$
een nulverzameling is.

7. **x-projecteerbaar gebied:** Een x-projecteerbaar gebied van $\mathbb{R}^2$ is een verzameling:
$$K = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$
waarvoor geldt:

   1 $f_1, f_2 \in C^1[a,b]$

   2 $f_1(x) \leq f_2(x), \ \forall x \in [a,b]$

   Een **y-projecteerbaar gebied** wordt dan analoog gedefinieerd.

8. **Paralellogram:** Zij $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Het parallellogram met hoekpunten $\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} + \vec{b}$ is het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

9. **Eenvoudig gebied in $\mathbb{R}^2$:** Een eenvoudig gebied in $\mathbb{R}^2$ is een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ die door middel van evenwijdig aan de coördinaatassen 'opgedeeld' kan worden in een eindig aantal gebieden die tegelijk x- en y-projecteerbaar zijn, een waarvan de inwendigen disjunct zijn.

5 Hoofdstuk 5

1. **Glad oppervlak:** Een glad oppervlak is een deelverzameling Σ van $\mathbb{R}^3$ die geschreven kan worden als $\vec{\varphi}(K)$, met $K \subset R^2$ een eenvoudig gebied en $\vec{\varphi} : K \to \mathbb{R}^3$ voldoend aan de eigenschappen:

   1 $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ is een bijectie van K op Σ.

   2 $\vec{\varphi} \in C^1(K)$

   3 $\left(\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\right)(u,v) \neq \vec{0}$ voor alle $(u,v) \in K$.

   De vectoren $\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u_0,v_0)$ en $\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u_0,v_0)$ noemen we **raakvectoren** aan Σ in het punt (u_0,v_0). Deze spannen in dat punt het **raakvlak** aan Σ op. $\left(\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\right)(u_0,v_0)$ is dan de **normaalvector** op Σ in dat punt. [14]

[14] Ook in deze context kan een unieke **overgang** $\vec{\theta}$ tussen twee parametervoorstellingen van eenzelfde glad oppervlak gedefinieerd worden, analoog als bij gladde krommen. Analoge definities voor **gelijk- en tegengesteld georiënteerd**.

2. **Oppervlakte van een glad oppervlak:** Zij Σ een glad oppervlak met parametervoorstelling $\vec{\varphi}: K \to \mathbb{R}^3$, dan is de oppervlakte van Σ:

$$Opp(\Sigma) = \iint_K \left\| \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right)(u, v) \right\| dudv$$

3. **Stuksgewijs glad oppervlak:** Een stuksgewijs glad oppervlak is een deel van R^3 dat te schrijven is als $\vec{\varphi}_1(K_1) \cup ... \cup \vec{\varphi}_N(K_N)$, waarbij elke $\vec{\varphi}_i : K_i \to \mathbb{R}^3$ een parametervoorstelling van een glad oppervlak is, en elk tweetal $\vec{\varphi}_i(K_i), \vec{\varphi}_j(K_j)$ disjuncte inwendigen heeft.[15]

4. **Oppervlakte-integraal langs/door een stuksgewijs glad oppervlak:** De oppervlakte-integraal van een continu *scalairenveld* langs een stuksgewijs glad oppervlak is de som van de oppervlakte-integralen langs de gladde oppervlakken waaruit het stuksgewijs glad oppervlak bestaat.
Zij $\vec{\varphi}: K \to \mathbb{R}^3$ een parametervoorstelling van een glad oppervlak, en heeft K als rand de gesloten[16] stuksgewijze gladde kromme Γ, dan noemen we $\vec{\varphi}(\Gamma)$ de **randkromme** van het oppervlak $\vec{\varphi}(K)$.
De oppervlakte-integraal van een continu *vectorveld* door een stuksgewijs glad oppervlak is de som van de oppervlakte-integralen door de gladde oppervlakken waaruit het stuksgewijs glad oppervlak bestaat, op voorwaarde dat de oriëntaties van die gladde krommen aaneensluiten; dwz. als de respectievelijke randkrommen van twee van die gladde oppervlakken zo doorlopen worden dat de omloopzin overeenkomt met de respectievelijke normaalvetor, dan moet het gemeenschappelijk stuk van de twee randkrommen twee keer in tegengestelde zin doorlopen worden.

6 Hoofdstuk 6

1. **xy-projecteerbaar gebied:** Een xy-projecteerbaar gebied van $\mathbb{R}^3$ is een verzameling:

$$K = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

met de volgende eigenschappen:

1 D is een eenvoudig gebied in het xy-vlak.

2 $f_1, f_2 \in C^1(D)$

3 $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ voor $(x, y) \in D$.

2. **Eenvoudig gebied in $\mathbb{R}^3$:** Een eenvoudig gebied in $\mathbb{R}^3$ is een compact gebied zonder gaten dat door vlakken evenwijdig aan de coördinaatvlakken 'opgedeeld' kan worden in een eindig aantal gebieden die tegelijk xy-, xz- en yz-projecteerbaar zijn.

3. **Stervormig oppervlak:** Een stervormig oppervlak is een stuksgewijs glad oppervlak Σ, niet door de oorsprong, met de eigenschap dat elke halfrechte uit de oorsprong Σ in hoogstens één punt snijdt, en dat zo geparametriseerd wordt dat de normaalvector van de oorsprong weg wijst.

4. **Ruimtehoek:** Zij Σ een stervormig oppervlak, en stel dat de kegel, gevormd door de halfrechten uit de oorsprong die Σ snijden, op het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ een oppervlak Σ' uitsnijdt. Het getal $\dfrac{Opp(\Sigma')}{R^2}$ noemt men de ruimtehoek van het stervormig oppervlak Σ.[17]

5. **Volume:** Het volume van een ruimtelichaam wordt gegeven door:

$$Vol(K) = \iiint_K dxdydz$$

[15] Hier betekent de toevoeging '(af)gesloten' dat elk lijnstuk dat een punt 'binnen' met een punt 'buiten' verbindt, het (af)gesloten oppervlak snijdt.
[16] Zie eerdere voetnoot over contextuele betekenis van de toevoeging 'gesloten'.
[17] Zie stelling 6.2.11 voor meer context.

7 Hoofdstuk 7

1. **Lokaal extremum:** Een $R^2 \to \mathbb{R}$ functie f, met domein D, bereikt in een punt $(a,b) \in D$ een (lokaal) maximum als er een omgeving $V = B((a,b),R)$ van (a,b) bestaat ($R > 0$) met de eigenschap dat:
$$(\forall(x,y) \in V \cap D)(f(x,y) \leq f(a,b))$$
Analoog voor een **(lokaal) minimum**. Een **(lokaal) extremum** is hetzij een minimum, hetzij een maximum.

2. **Kritiek punt:** Een punt (a,b) waarin $\nabla f(a,b) = 0$ wordt een kritiek punt genoemd van de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie f.

3. **Zadelpunt:** Een kritiek punt waarin een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie f geen lokaal extremum bereikt, noemt men een zadelpunt van f.

4. **Hessiaanse determinant:** Zij f een $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie van klasse C^2, dan is de Hessiaanse determinant van f in een punt (a,b) van haar domein gegeven door:
$$\det(H) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$$
Zij bovendien $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, dan betekent $\det(H) > 0$ dat f in (a,b) een lokaal extremum bereikt. Is $\det(H) < 0$, dan gaat het om een zadelpunt. Is $\det(H) = 0$, dan kunnen we geen besluit trekken over het al dan niet bereiken van een extremum.