Wetenschappelijk Rekenen

UNIVERSITEIT GENT

Examen - Bacheloropleiding informatica

Gesloten-boek-examen – 26 mei 2021

Naam : ....Model-student......

1. (2 pt) Definieer, formuleer of omschrijf de volgende begrippen :

   (i) UFL - OFL - machine-epsilon (vermeld ook hoe deze begrippen afhangen van de voorstelling van getallen):

   UFL = underflow level = kleinste voorstelbaar pos. getal
   → bepaald door exponent

   OFL = overflowlevel: grootste voorstelbaar pos. getal

   $\varepsilon_{mach} \doteq \min_{\varepsilon > 0} fl(1 + \cancel{\varepsilon_{mach}}) \neq 1$. : bepaald door mantisse

   (ii) het conditiegetal van een numeriek probleem: maat voor de sensitiviteit van een probleem.

   $\left\| \frac{y/\Delta y}{x/\Delta x} \right\|$ beschrijft hoe groot deze uitdrukking kan wordt

   (iii) kubische spline interpolant: Beschouw n punten (t_i, y_i) $i = 1..n$
   ↳ stuksgewijze veeltermenterpolant ~~met~~ van graad 3 met continue tweede orde afgeleiden in de knooppunten $(t_2, y_2) \dots (t_{n-1}, y_{n-1})$

   (iv) een familie progressieve kwadratuurregels:

   Kwadratuurregels met een verschillend aantal knopen waarbij de knopen uit de ene kwadratuurregel ook voorkomen in deze met meer knopen.

2. (1 pt) Schrijf bij elke uitspraak een MacLaurin-ontwikkeling neer. Onderstreep telkens die coëfficiënten die van belang zijn om volledig aan de omschrijving te voldoen.

   1. De grafiek van $f_1(x)$ raakt die van $\cos(x)$ in $x = 0$.

      $f_1(x) = \underline{1} + \underline{0}\,x + \mathcal{O}(x^2)$

   2. $f_2(x) = \exp(2\,x) + \mathcal{O}(x^3)$

      $f_2(x) = \underline{1} + \underline{2}x + \underline{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

3. (1 pt) Vertrek van de formule

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

om een centrale benaderingsformule van tweede orde te bepalen voor $f''(x)$.

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + f''''(x)\frac{h^4}{24} + \ldots$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

4. (2 pt) Gegeven de niet-singuliere reële $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$, en de reële $n \times 1$ matrices $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$. Leg uit hoe je dan in de onderstaande gevallen computationeel gezien de uitdrukking $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ het best berekent. Leg ook telkens uit welke berekening er dient te gebeuren.

(i) als $\mathbf{A}$ een willekeurige matrix is.

$$A(x-b) = c$$

$$\hookrightarrow A y = c \quad (LU)$$

$$x = y + b$$

(ii) als $\mathbf{A}$ orthogonaal is.

$$x = b + A^T c$$

(iii) als je de matrices $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$ van de QR-ontbinding $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ ter beschikking hebt.

$$R(x-b) = Q^T c$$

↳ achter ~~voor~~waartse substitutie

(iv) als je de orthogonale matrices $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ en de diagonale matrix $\mathbf{\Sigma}$ ter beschikking hebt waarvoor $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$.

$$x = b + V \underbrace{\Sigma^{-1}}_{\downarrow} U c$$

inverse van diagonaal matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$

5. (2 pt) In de cursus worden zowel de onderwerpen interpolatie als approximatie besproken.

(i) Wat is het verschil tussen beide? Wanneer verkies je interpolatie? Wanneer verkies je approximatie?

Gegeven : een aantal punten (t_i, y_i) $i=1..n$

① ~~ap~~ interpolatie : $p(t_i)=y_i$ $i=1..n$.

② approximatie : minim $\sum_{i=1}^{n}\left(p(t_i)-y_i\right)^2$

Gebruik approximatie als er
- heel veel punten zijn
- ruis op punten zit

(ii) Bij interpolatie met een veelterm van hoge graad kun je voor een probleem komen te staan. Leg uit wat dat probleem is en geef verschillende mogelijkheden om dit probleem (nog steeds via interpolatie) op te lossen.

De veelterm gaat oscilleren.

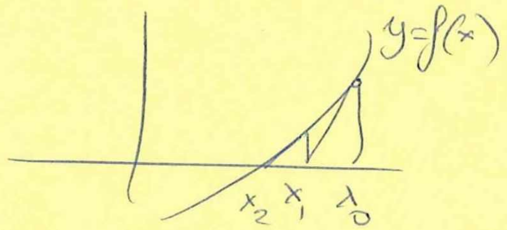
Oplossing : 1) kies de interpolatiepunten niet equidistant, maar neem de Chebyshev-punten

2) stuksgewijze veeltterminterpolatie

6. (2 pt)

(i) Schrijf het Newton-Raphson schema, ter bepaling van de nulpunten van een scalaire vergelijking $f(x) = 0$, op. Leg uit, ook aan de hand van een tekening, hoe je aan die formule komt.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



(ii) Leg uit hoe je dit schema dient aan te passen wanneer je een stelsel van vergelijkingen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ wilt oplossen.

$$J(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k)$$

(iii) Leg uit hoe je het schema (ii) dient aan te passen wanneer je een extremum zoekt van een functie $f(\mathbf{x})$ van meerdere veranderlijken.

$$H_f(x_k)\,(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$$

(iv) Pas één stap uit (iii) toe op $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$ vertrekkend vanuit $(1, 1)$. Wat is het resultaat?

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} s_0 = -\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \implies s_0 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies x_1 = x_0 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. (2 pt) Een interpolatieveelterm van graad n door $n+1$ gegeven punten (t_i, y_i) kan, afhankelijk van de gekozen basis, op verschillende manieren geconstrueerd worden.

(i) (1 pt) Geef 4 verschillende manieren en beschrijf telkens de basisfuncties waarmee de interpolatieveelterm is opgebouwd.

(a) manier 1 : $\{1, t, \ldots t^n\}$

(b) manier 2 : Lagrange : $l_j(t_i) = \delta_{ij}$

$\{l_1(t) \ldots l_n(t)\}$

(c) manier 3 : Newton $\pi_1(t) = 1$

$\pi_{j+1}(t) = \pi_j(t)(t - t_j)$

$\{\pi_1(t), \ldots \pi_{j+1}(t)\}$

(d) manier 4 : Orthogonale veeltermen $\langle p_i | p_j \rangle = \delta_{ij}$

$\{p_0(t), \ldots, p_n(t)\}$

(ii) (1 pt) Waarin verschillen, wiskundig gezien, de 4 aldus bekomen interpolatieveeltermen? Waarin verschillen, vanuit numeriek standpunt, de 4 aldus bekomen interpolatieveeltermen?

wiskundig gezien: allemaal identiek

praktisch gezien: de ene is gemakkelijker in gebruik dan de andere

8. (2 pt) We bestuderen de Richardson extrapolatietechniek voor een functie $F(h) = a_0 + a_1 h^p + \mathcal{O}(h^r)$ waarbij $r > p$. Hierbij zoeken we een benadering voor $a_0 = F(0)$, en daarvoor gebruiken we een numerieke methode, voorgesteld door $F(h)$. Stel dat we F kennen voor h en h/q.

   (i) (1 pt) Elimineer $a_1 h^p$ uit de bovenstaande formule, vertrekkend van de uitdrukkingen voor $F(h)$ en $F(h/q)$, zodat je komt tot een betere benadering a_0.

$$F(h) = a_0 + a_1 h^p + \mathcal{O}(h^r)$$

$$F(h/q) = a_0 + a_1 (h/q)^p + \mathcal{O}(h^r)$$

$$F(h) - q^p F(h/q) = a_0 (1 - q^p) + \mathcal{O}(h^r)$$

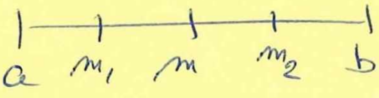
$$\Rightarrow a_0 = \frac{F(h) - q^p F(h/q)}{1 - q^p} + \mathcal{O}(h^r)$$

   (ii) (1 pt) Pas dit algoritme toe voor $q = 2$ bij $\int_a^b f(x)\,dx \approx M(f)$ waarbij $M(f) = (b-a)\,f(m)$ met $m = (a+b)/2$. Wat zijn p en r in deze formule? Toon aan dat je de volgende kwadratuurformule bekomt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right).$$

   Kun je deze kwadratuurformule typeren (m.a.w. welke kwadratuurformule is dit)?

$$F(h) = (b-a)\, f(m)$$



$$F(h/2) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left[f(m_1) + f(m_2)\right]$$

$p=2$, $r=4$, $q=2$.

$$a_0 = \frac{F(h) - 4F(h/2)}{1-4} = \frac{4F(h/2) - F(h)}{3}$$

$$= \left(\frac{b-a}{3}\right)\left[2f(m_1) + 2f(m_2) - f(m)\right]$$