Examen Differentiaalmeetkunde (25 juni 2024, 8u30–12u30)

Enkele instructies

- Schrijf op elk blad dat je afgeeft **je naam en je studentennummer**. Bladen zonder naam worden niet verbeterd.
- Schrijf je antwoorden op het theoriegedeelte en het oefeningengedeelte op **aparte** bladen. Als je klaar bent met theorie geef je die antwoorden af, en haal je je cursus om verder te werken aan de oefeningen.
- Geef een **zo duidelijk mogelijk** antwoord op **alle** vragen die gesteld worden. Het is de bedoeling om ons te overtuigen dat je het antwoord op de vraag weet.
- Noteer ook iets als je het antwoord op een vraag **niet** weet. Bv. "Theorie 2 (b): Geen antwoord".

Veel succes!

Theorie (gesloten boek)

1. (3 ptn) Beschouw een bol β met middelpunt $\mathbf{m}$ en straal r, en een kromme $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ met $0 \in I$.
   (a) Definieer n-de orde aanraking voor de kromme $\mathbf{c}$ in $s = 0$ met de bol β.
   (b) Veronderstel dat $1/\rho(0) \neq 0$. Geef alle bollen waarmee $\mathbf{c}$ in $s = 0$ minstens 2-de orde aanraking heeft, en bewijs.

2. (4 ptn) Beschouw een oppervlak $\boldsymbol{\sigma} : U \to \Sigma$ en een kromme $\mathbf{c} : I \to \sigma : s \mapsto \mathbf{c}(s) = \boldsymbol{\sigma}(q^1(s), q^2(s))$ gelegen op Σ, die booglengte als parameter heeft.
   (a) Wanneer noemt men $\overset{\bar{c}}{\boldsymbol{\sigma}}$ een geodetische lijn op het oppervlak Σ?
   (b) Stel dat het osculatievlak van $\boldsymbol{\sigma}$ in elk punt welbepaald is. Geef en bewijs een meetkundige karakterisatie in termen van het osculatievlak voor het geodeet-zijn van $\mathbf{c}$.
   (c) Geef en bewijs de differentiaalvergelijking waaraan de functies $q^1(s)$ en $q^2(s)$ moeten voldoen opdat $\mathbf{c}$ een geodeet is.

3. (3 ptn) Zij M een differentieerbare variëteit, (U, ϕ) en (V, ψ) twee overlappende kaarten, en $m \in U \cap V$.
   (a) Wanneer noemen we deze kaarten C^∞-verenigbaar?
   (b) Onderstel dat deze kaarten C^∞-verenigbaar zijn, en noteer de coördinaten horende bij U resp. V met q^i resp. Q^i. Een raakvector $v_m \in T_m M$ heeft dan de voorstellingen

   $$v_m = v^j \frac{\partial}{\partial q^j}\bigg|_m = V^i \frac{\partial}{\partial Q^i}\bigg|_m .$$

   Leid het verband af tussen de coëfficiënten v^j en V^i.

Oefeningen (open boek)

1. (3,5 ptn) Beschouw de kromme $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$.
   (a) Bereken de kromming en wringing van $\mathbf{c}$.
   (b) Toon aan dat er een rechte bestaat die een nietledige doorsnede heeft met alle binormalen van $\mathbf{c}$.
2. (4,5 ptn) Beschouw het oppervlak met vergelijking $z = 3x^4 - 2y^2$.
   (a) Bepaal alle asymptotische lijnen.
   (b) In welke punten van het oppervlak is de Gausskromming nul? Zijn dit parabolische of vlakke punten?
3. (2 ptn) Beschouw de variëteit $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ uit voorbeeld 5 op pagina 98–99. Toon aan dat de afbeelding

$$\mathrm{tr} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$$

glad is.