INLEIDING TOT DE THEORETISCHE FYSICA

EXAMENVRAGEN

HOOFDSTUK 1

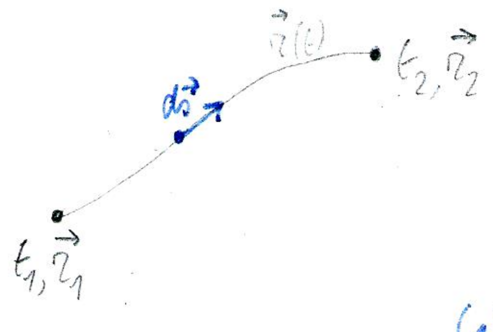
OVERZICHT VAN DE ELEMENTAIRE BEGRIPPEN

§1.1 MECHANICA VAN 1 DEELTJE

①

Toon aan dat de arbeid verricht door de kracht op een deeltje tussen twee punten van zijn baan gelijk is aan het verschil in kinetische energie tussen deze twee punten. Definiëer een conservatieve kracht, en leid de functionele vorm af waaraan een conservatieve kracht moet voldoen. Definiëer de totale energie bij een conservatief systeem, en toon aan dat deze behouden is.

Onder invloed van de kracht $\vec{F}$ op een deeltje beweegt dit op een ruimtelijke baan $\vec{r}(t)$ tussen een tijdstip t_1 en t_2. We definiëren de arbeid door de kracht $\vec{F}$ op het deeltje gedurende dit pad door de lijnintegraal



$$W_{1\to 2} = \int_{1\to 2} \vec{F}\cdot d\vec{s}, \qquad (1)$$

met $d\vec{s}$ een infinitesimaal lijnelement rakend aan de baan waarvoor geldt: $d\vec{s} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt$.
Hiermee wordt (1):

$$W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{\vec{r}})\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}\right)dt = T(t_2) - T(t_1) \qquad (2)$$

met de scalaire functie $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}$ gedefinieerd als 'kinetische energie'.

Een conservatieve kracht verricht voor gelijk welk mogelijk pad tussen $(t_1, \vec{r}_1)$ en $(t_2, \vec{r}_2)$ eenzelfde arbeid. Dit is analoog met zeggen dat bij een conservatieve kracht de kringintegraal langs een pad dat op zichzelf sluit, nul is: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$.
Dit is enkel mogelijk wanneer de geleverde arbeid enkel van de begin- en eindposities afhangt, m.a.w. we hebben een of andere functie $f(\vec{r}(t))$ waarvoor

$$W = \int_{1\to 2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1),$$

dus $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ moet een tijdsafgeleide zijn van een bepaalde $f(\vec{r}(t))$, er moet dus voor elk pad $\vec{r}(t)$ gelden:

$$\left(\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)\right) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t))$$

Nu heeft men voor een scalaire functie f: $\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)) \frac{\partial y}{\partial t}(t) + \cdots$
$= (\vec{\nabla} f) \cdot \dot{\vec{r}}$

Gelet op de kettingregel (zie potlood) is hier zeker aan voldaan als

$$\left(\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\right) \cdot \cancel{\dot{\vec{r}}} = (\vec{\nabla} f) \cdot \cancel{\dot{\vec{r}}} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

De kracht $\vec{F}$ hangt dus enkel van de positie af, en is een gradiëntveld. De scalaire functie V wordt de potentiële energie genoemd. Voor de arbeid vinden we:

$$W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left[-\vec{\nabla} V(\vec{r}(t))\right] \cdot \dot{\vec{r}}}_{= -\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) \text{ (kettingregel)}}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t))\right) dt = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V_1 - V_2 \quad (3)$$

Combineert men (3) met (2) dan ziet men dat $T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \Leftrightarrow V_1 + T_1 = V_2 + T_2$.
De totale energie is dus $T + V$ en is behouden. □

② Wat als de kracht een gradiëntveld is, maar ook een expliciete tijdsafhankelijke vertoont?

We noteren dit compact als $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t)$. Nu geeft de kettingregel

$$\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t), t) = \frac{\partial V}{\partial x}(\vec{r}(t), t) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\vec{r}(t), t) \frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial z}(\vec{r}(t), t) \frac{dz}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t), t)$$

Of nog:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) = \vec{\nabla}V(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t)$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t) \qquad (1)$$

Nu hebben we voor de infinitesimale arbeid:

$$\vec{F}(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = -\vec{\nabla}V(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt$$

$$\overset{(1)}{=} \left(-\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t)\right)dt \qquad (2)$$

Uit (2) kan men besluiten dat de energie T+V wel nog steeds kan gedefinieerd worden, maar ze niet behouden blijft vanwege de $\partial V/\partial t$-term. □

G1.2 MECHANICA VAN MEERDERE DEELTJES

3 (a) Definiëer het zwaartepunt van een systeem van meerdere deeltjes. (b) Toon aan dat het zwaartepunt beweegt als een deeltje met de totale massa van het systeem onder invloed van de totale externe kracht, mits de interne krachten voldoen aan de (zwakke vorm) van de 3e wet van Newton. (c) Definiëer de totale impuls van het systeem en toon dat deze behouden is als de externe kracht op het systeem verdwijnt.

(a) Voor een discrete massaverdeling hebben wij de positie van het COM gedefinieerd als $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \qquad (1)$$

(b) Op een deeltje i van de massaverdeling werken twee krachten:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \begin{pmatrix}\text{externe}\\ \text{krachten}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{interne krachten}\\ \text{op } i\end{pmatrix} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} \qquad (2)$$

Volgens de 3e wet van Newton valt de laatste term van (2) weg wanneer gesommeerd wordt over alle deeltjes, daar $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. We houden dan voor de totale kracht $\vec{F}$ (schijnbaar in het COM) over:

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)} \qquad (3)$$

(c) Uit (3) volgt dus:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)} \qquad (4)$$

Terwijl de totale impuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\dot{\vec{R}}$. Dan is $\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}$, zodat (4) kan geschreven worden als:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)} \qquad (5)$$

Als de totale externe kracht $\vec{F}^{(e)} = 0$ is $\dot{\vec{P}} = 0$ en $\vec{P}$ constant. De totale impuls is dan behouden.

□

4 (a) Definieer het totaal draaimoment en extern krachtmoment (rond de oorsprong van een Cartesisch coördinaatsysteem). (b) Toon aan dat in geval van centrale interne krachten (sterke vorm 3e wet van Newton), de tijdsevolutie van het totaal draaimoment bepaald wordt door het extern krachtmoment, en dat het totaal een behouden grootheid is als het extern krachtmoment op het systeem verdwijnt.

(a) $\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$, $\quad \vec{N}^{(e)} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)})$

(b) $\dot{\vec{L}} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{=0} + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Sterke vorm van wet van actie en reactie: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ én $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, dus centrale interne krachten. In dit geval is $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)}$, zodat

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{N}^{(e)}$$

Zonder extern krachtmoment: $\vec{N}^{(e)} = 0 = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \vec{L}$ is constant. Draaimoment is dan een behouden grootheid.

□

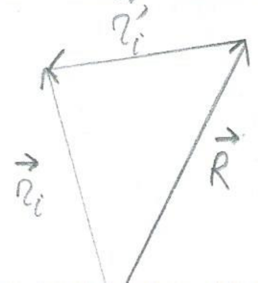
5 Toon aan dat het totaal draaimoment (rond de oorsprong) de som is van het draaimoment van het zwaartepunt plus het draaimoment van de beweging van de deeltjes t.o.v. het zwaartepunt.

We introduceren plaatsvectoren $\vec{r}_i'$ relatief t.o.v. $\vec{R}$:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \qquad (1)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i' \qquad (2)$$

$$\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{R}} + \vec{p}_i' \qquad (3)$$



Uit (1) volgt dan onmiddelijk dat $\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$, want

$$\cancel{\sum_i m_i \vec{r}_i} = \underbrace{\sum_i m_i \vec{R}}_{= M\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i' = \cancel{\sum_i m_i \vec{r}_i} + \sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \qquad (4)$$

$\& \ \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \ \Big\} \ M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$

Dan is $\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times \vec{p}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i \qquad (5)$

Uit (3) weten we: $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p}_i'$ relatieve impuls. Dit steken we in (5):

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p}_i') = \vec{R} \times \vec{P} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right)}_{0} \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

□

(6) Toon aan dat de arbeid verricht door de krachten op de deeltjes tussen twee punten van van het configuratiepad gelijk is aan het verschil in totale kinetische energie tussen deze twee punten.

Arbeid verricht door de krachten om het systeem van een configuratie op t_1, $\vec{r}_i(t_1)$ naar een configuratie op t_2, $\vec{r}_i(t_2)$ te brengen:

$$W_{1\to 2} = \sum_i \int_{1\to 2} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \, dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (m \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i \, dt$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = T(t_2) - T(t_1)$$

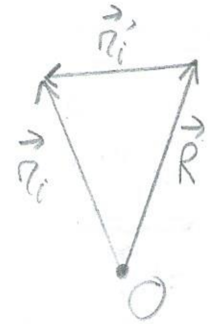
met de scalaire functie $T = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2\right]$ de totale kinetische energie van het systeem. □

(7) Toon aan dat de totale kinetische energie gelijk is aan de som van de kinetische energie van het zwaartepunt plus de kinetische energie van de beweging van de deeltjes rond het zwaartepunt.

We moeten dus bewijzen dat

$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i')^2$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i'\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \Big(\dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{r}}_i'^{\,2} + \underbrace{2\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}_i'}_{\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0}\Big)$$
$$= \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^{\,2}$$



(8) Definiëer conservatieve externe en interne krachten (de interne krachten voldoen aan de zwakke vorm van de 3e wet van Newton). Toon aan dat in dit geval de totale energie een behouden grootheid is.

- <u>Conservatieve externe kracht</u>: als $\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i$ → de externe kracht op deeltje i is enkel een functie van de positie van i, dus $\vec{F}_i^{(e)}(\vec{r}_i)$. De notatie $\vec{\nabla}_i$ betekent $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right)$, dus partieel afleiden naar de coördinaten van deeltje i.
Er is een scalaire onderliggende potentiaal $V_i \equiv V_i(\vec{r}_i)$ die enkel van de positie van deeltje i afhangt, zodat
$$\vec{F}_i^{(e)}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i)$$

- <u>Conservatieve interne kracht</u>: als $\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ji}$ → de kracht van deeltje j op deeltje i is een vectorfunctie van de posities van i en j, dus $\vec{F}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$. Translatie-invariantie impliceert dat de vectorfunctie enkel van het verschil $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ kan afhangen. Dan kan ook de onderliggende scalaire potentiaal enkel van $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ afhangen: $V_{ji} \equiv V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$.
$$\vec{F}_{ji}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Nu zorgt de (zwakke vorm van) de 3e wet van Newton $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, dat de potentiaalfunctie symmetrisch is, d.i. $V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$. Dit verklaart (*):

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &\overset{(*)}{=} -\vec{\nabla}_j V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &\shortparallel \\ -\vec{F}_{ji} &= +\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \end{aligned}\right\} -\vec{\nabla}_j V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = +\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad \text{of} \quad -\vec{\nabla}_j V_{ji} = \vec{\nabla}_i V_{ji}$$

Centrale interne krachten (sterke wet van actie en reactie) m.a.w. $\vec{F}_{ji} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ vereisen bovendien dat de potentiaal enkel functie is van de afstand, dus
$$V_{ij} = V_{ji} = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$
Dan geeft $\vec{\nabla}_i V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ aanleiding tot een centrale kracht.

In geval van conservatieve externe en interne krachten geldt dus dat:

$$W_{1\to 2} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (-\vec{\nabla}_i V_i)\cdot\dot{\vec{r}}_i\, dt + \sum_{ij}\int_{t_1}^{t_2} (-\vec{\nabla}_i V_{ji})\cdot\dot{\vec{r}}_i\, dt$$

waarbij

$$\sum_i (\vec{\nabla}_i V_i)\cdot\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i V_i(\vec{r}_i)\right)$$

$$\sum_{ij} (\vec{\nabla}_i V_{ji})\cdot\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right)$$

Nu is de potentiële energie $V_{tot} = \sum_i V_i(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Voor de kinetische energie hadden we gevonden: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2$. Hun som is dus weer behouden. □

G1.3 BINDINGEN

9 (a) Toon aan dat in geval van holonome bindingen men altijd onafhankelijke veralgemeende coördinaten kan invoeren. (b) Wat zijn bvb. de meest geschikte veralgemeende coördinaten voor een deeltje dat beweegt op een boloppervlak waarvan de straal expliciet van de tijd afhangt?

(a) Stel we hebben N deeltjes, dus 3N vrijheidsgraden. Dankzij de bindingen kunnen we het aantal vrijheidsgraden echter verminderen. Beschouw n_b holonome bindingen

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \\ \vdots \\ f_{n_b}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \end{cases}$$

Met dit stelsel elimineren we n_b onbekenden; we houden $n_q = 3N - n_b$ **onafhankelijke variabelen** (of n_q vrijheidsgraden) over.

(b) Twee veralgemeende coördinaten: (θ, ϕ) die we gebruiken als bolcoördinaten (met $r = R(t)$ de straal van de bol, op ieder moment gekend):

$$x = R(t)\sin\theta\cos\phi, \quad y = R(t)\sin\theta\sin\phi, \quad z = R(t)\cos\theta$$ □

G 1.4 PRINCIPE VAN D'ALEMBERT EN LAGRANGEVERGELIJKINGEN

(10) Neem aan dat voor een systeem met holonome tijdsonafhankelijke bindingen het principe van d'Alembert geldt, m.a.w. de arbeid verricht door de reactiekrachten verdwijnt. Ga over naar onafhankelijke veralgemeende coördinaten en leid hieruit de 1e vorm van de Lagrangevergelijkingen af.

We bewijzen dus dat $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}$, gebruikmakend van het Principe van d'Alembert op de reactiekrachten $\vec{F}_i^{(r)}$: $\sum_i \vec{F}_i^{(r)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$. Noem $\vec{F}^{(a)}$ de toegepaste kracht, dan geeft de 2e wet v. N.

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)} - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)} - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0,$$

waarbij we gebruik maakten van d'Alembert. We laten superscript (a) wegvallen:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0, \qquad (1)$$

voor alle toegelaten bewegingen $\dot{\vec{r}}_i$. Door de bindingen zijn de $\vec{r}_i$, en dus ook de $\dot{\vec{r}}_i$, niet onafhankelijk. Beschouw n_b holonome tijdsonafhankelijke bindingen $f_n(\vec{r}_i) = 0$, dan moeten we eerst overgaan naar $n_q = 3N - n_b$ veralgemeende coördinaten zodanig dat alle $\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_k)$ automatisch voldoen aan $f_n(\vec{r}_i) = 0$. De q_k op hun beurt kunnen een tijdsafhankelijkheid krijgen, dan beschrijven de Cartesische coördinaten een pad $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q_k(t))$. Nu volgt hieruit het verband tussen de Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot q_k \qquad \text{(kettingregel)} \qquad (2)$$

Substitueer (2) in (1):

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot q_k = \sum_k \dot q_k \left\{ \sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right\} = 0, \qquad (3)$$

waarbij we een veralgemeende kracht Q_k definiëren als:

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \qquad (4)$$

Nu gaan we (3) een beetje verder uitwerken door een uitdrukking te zoeken voor $\vec{\dot{p}}_i$.
Laten we de massa even achterwege dan wordt de $\vec{\dot{p}}_i$-term:

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \qquad (5)$$

Uit (2) volgt (afleiden naar $\dot{q}_k$):

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad \text{of} \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) \qquad (6)$$

We onthouden (6) al, **want** we willen deze straks substitueren in (5). Eerst zoeken we nog een uitdrukking voor de tweede term van het RL, waarvoor we weer een beroep doen op (2):

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_k \qquad (7)$$

Maar de tijdsafgeleide rechts in (5) geeft door de kettingregel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_l \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l \qquad (8)$$

Dit lijkt op (7); de logische geest leert ons dat

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) \qquad (9)$$

Nu kunnen we (5) uitwerken door **er** (6) en (9) in te substitueren:

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) \qquad (10)$$

Nu gebruiken we (10) op zijn beurt om de $\vec{\dot{p}}_i$-term in (3) te herschrijven, wetende dat $\vec{\dot{p}}_i = m\ddot{\vec{r}}_i$:

$$\sum_i \vec{\dot{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad \text{met } T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \qquad (11)$$

Nu steken we $\vec{p}_i$-term (11) weer in de oorspronkelijke (3):

$$\sum_k \dot{q}_k \left\{ Q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} = 0, \text{ of nog: } \sum_k \dot{q}_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right\} = 0,$$

en omdat de q_k onafhankelijke coördinaten voorstellen, kan dit enkel als dit voor iedere q_k afzonderlijk ook geldt (en niet alleen voor de som), dus:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

□

(11) Specialiseer naar een systeem met conservatieve (toegepaste) krachten en leid de 2e vorm van de Lagrangevergelijkingen af.

Voor een systeem met conservatieve krachten is $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$ met de potentiaal $V \equiv V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ enkel functie van de positie van de deeltjes. Via de transformatie naar veralgemeende coördinaten volgt dat de potentiaal enkel van de veralgemeende coördinaten afhangt, $V \equiv V(\vec{r}_1(q_k), \dots, \vec{r}_N(q_k))$.

De afgeleide van de potentiaal naar een veralgemeende coördinaat volgt uit de kettingregel:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_i \left(\vec{\nabla}_i V\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{1}$$

Waarmee we bedoelen

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\vec{e}_{x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1}\vec{e}_{y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}\vec{e}_{z_1}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_k} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\vec{e}_{x_2} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\vec{e}_{y_2} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\vec{e}_{z_2}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_k} + \dots$$

Zodat we uit de definitie voor veralgemeende kracht onmiddellijk halen:

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_i \left(\vec{\nabla}_i V\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \overset{(1)}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{2}$$

De potentiaal hangt enkel van de veralgemeende coördinaten af, dus niet van de snelheden:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{3}$$

Nu vult men al dit fraais in in de 1e vorm van de lagrangevergelijkingen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

met $L = T - V$ de lagrangiaan. □

HOOFDSTUK 2

VARIATIONELE PRINCIPES EN DE LAGRANGEVERGELIJKINGEN

G2.2 VARIATIE ANALYSE

(12) Leid de Euler-Lagrange vergelijking af voor het volgend probleem: voor welke functie $y(x)$ die door twee gegeven punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat (i.e. $y(x_1) = y_1$ en $y(x_2) = y_2$ is de integraal

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(x), \dot{y}(x), x)$$

extremaal? Hier is f een gladde functie met 3 argumenten.

De vraag is dus: voor welk pad $y(x)$ wordt de integraal J stationair, d.i. een kleine vervorming van het pad verandert de waarde van de integraal niet (tot op 1e orde voor de kleine vervorming). De integraal is dan extremaal (maximaal of minimaal), wat we mathematisch als volgt uitdrukken:

Stel dat $y(x)$ het pad is waarvoor J stationair wordt. Bekijk een familie van paden $y(x,\alpha)$, geparametriseerd a.h.v. een parameter α:

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\eta(x), \qquad (1)$$

met $\eta(x)$ een arbitraire functie, behalve dat $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, zodat elk pad $y(x,\alpha)$ de

Voor kleine α ligt $y(x,\alpha)$ in de buurt van $y(x)$; het valt ermee samen als $\alpha = 0$.
De integraal J kan geëvalueerd worden voor alle paden $y(x,\alpha)$, en wordt zo een functie van α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f\big(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x\big) \qquad (2)$$

De integraal moet stationair zijn voor $y(x)$, dus $\alpha = 0$. Hij bereikt dan zijn extreme waarde:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \qquad (3)$$

We werken dit uit:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{d}{d\alpha} f\big(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x\big)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}\big(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x\big)\right] \frac{d}{d\alpha} y(x,\alpha) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\big(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x\big)\right] \frac{d}{d\alpha} \dot{y}(x,\alpha) \right\}$$

Uit (1) volgt: $\frac{d}{d\alpha} y(x,\alpha) = \eta(x)$ en $\frac{d}{d\alpha} \dot{y}(x,\alpha) = \dot{\eta}(x)$. We evalueren verder voor $\alpha = 0$, zodat $y(x,\alpha=0) = y(x)$ en $\dot{y}(x,\alpha=0) = \dot{y}(x)$:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}\big(y(x), \dot{y}(x), x\big)\right] \eta(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\big(y(x), \dot{y}(x), x\big)\right] \dot{\eta}(x) \right\} \qquad (4)$$

We noemen

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\big(y(x), \dot{y}(x), x\big) =: h(x)$$

en passen partiële integratie toe op het product $h(x)\dot{\eta}(x)$ in vgl. (4):

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, h(x) \frac{d\eta}{dx}(x) = h(x_2)\eta(x_2) - h(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} dx\, \eta(x) \frac{dh}{dx}(x) \qquad (5)$$

De eerste twee termen in het RL van (5) verdwijnen daar $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.
We herschrijven (4) m.b.v. (5):

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \eta(x) \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x), \dot{y}(x), x)\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x)\right] \right\} \qquad (6)$$

De voorwaarde voor stationariteit volgt uit (3): de integraal moet 0 worden en dit moet gelden voor een arbitraire functie $\eta(x)$. Het is dus de factor binnen {} die hier verantwoordelijk voor zal moeten zijn: hij dient te verdwijnen over het integratie-interval.

De Euler-Lagrangevergelijking is dan niets anders dan de differentiaalvergelijking waaraan $y(x)$ moet voldoen wil deze de integraal in (6) stationair maken:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, \dot{y}, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}, x)\right), \text{ of korter: } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \qquad \square$$

§2.3 LAGRANGE VERGELIJKING UIT HET PRINCIPE VAN HAMILTON

13

Veralgemeen dit tot het probleem: voor welke functies $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ die door twee gegeven configuraties $(y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1))$ en $(y_1(x_2), \ldots, y_n(x_2))$ gaan is de integraal

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_1(x), \ldots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \ldots, \dot{y}_n(x), x)$$

extremaal? Leid de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen af.

Deze uitbreiding is analoog aan het vorige. I.p.v. $y(x)$ hebben we nu een $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$-functie $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ dat een beginconfiguratie voor $x = x_1$ met een eind-configuratie voor $x = x_2$ verbindt. We vragen ons opnieuw af voor welke voorwaarden het pad $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ een stationaire waarde oplevert voor J.

We voeren opnieuw een familie van paden in rond $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ a.h.v.

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha\, \eta_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

De η_i zijn arbitraire functies, behalve dat $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$, $\forall i$. Evaluatie van de integraal met het pad $(y_1(x, \alpha), \ldots, y_n(x, \alpha))$ levert een functie van α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f\big(y_1(x,\alpha), \dots, y_n(x,\alpha), \dot{y}_1(x,\alpha), \dots, \dot{y}_n(x,\alpha)\big) \qquad (2)$$

Stationariteit van J voor het pad $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ betekent dat

$$0 = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i \right\}, \qquad (3)$$

daar $\frac{d}{d\alpha} y_i(x,\alpha) = \eta_i$ en $\frac{d}{d\alpha} \dot{y}_i(x,\alpha) = \dot{\eta}_i$. De termen in het integrandum van (3) met $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\dot{\eta}_i$ worden weer omgezet met partiële integratie:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i := \int_{x_1}^{x_2} dx\, h_i(x) \frac{d\eta_i}{dx}(x) = \underbrace{h_i(x_2)\eta_i(x_2) - h_i(x_1)\eta_i(x_1)}_{=0} - \int_{x_1} dx\, \eta_i \frac{dh_i}{dx}$$

Dus opnieuw:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_i \eta_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right)$$

Dit moet gelden voor arbitraire functies $\eta_i(x)$, zodat de factor die elke η_i vermenigvuldigt nul moet zijn. De corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen zijn dan:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}$$

□

14

(a) Definiëer de actie-integraal, d.i. de tijdsintegraal van de Lagrangiaan tussen twee tijdstippen, (b) en toon aan dat de eis dat de actie-integraal extremaal is, resulteert in de Lagrangevergelijkingen.

(a) $I = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)$

(b) Eisen dat I stationair is voor het fysisch gerealiseerde pad $\{q_k(t)\}$ in de configuratieruimte, is equivalent met de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen voor dit variationeel probleem:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right),$$

wat precies de Lagrange bewegingsvergelijkingen zijn. □

G2.5 VOORDELEN VAN EEN VARIATIONELE FORMULERING

(15) Toon aan dat de Lagrangiaan niet-uniek is, m.a.w. dat de Lagrange vergelijkingen invariant zijn als een totale tijdsafgeleide van een functie van de coördinaten en de tijd bij de Langrangiaan wordt opgeteld.

• Met de variationele formulering: stel dat een systeem beschreven wordt door een Lagrangiaan L. Definieer een nieuwe Lagrangiaan L' als:

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}(h(q_k, t))$$

Dan wordt de actie-integraal I' van L':

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) + \frac{d}{dt}(h(q_k(t), t)) \right\}$$

De bijdrage van de laatste term in het integrandum, als totale tijdsafgeleide, reduceert zich tot

$$h(q_k(t_2), t_2) - h(q_k(t_1), t_1)$$

en heeft dezelfde waarde voor alle paden die de beginconfiguratie $\{q_k(t_1)\}$ met de eindconfiguratie $\{q_k(t_2)\}$ verbinden. Het speelt dus geen rol in het variationeel probleem, en het stationair zijn van I en I' geeft dezelfde oplossing voor het fysisch gerealiseerde pad.

• Uit de Lagrangevergelijkingen: zie cursus, slides 77/78.

De Lagrangiaan is dus slechts bepaald op een totale tijdsafgeleide van een functie van de coördinaten en de tijd na. □

G 2.6 BEHOUDSWETTEN EN SYMMETRIE-EIGENSCHAPPEN

(16)

Voer algemeen het canonisch toegevoegd moment p_k van een veralgemeende variabele q_k in. Toon aan dat dit een behouden grootheid is als de Lagrangiaan niet van de variabele q_k afhangt (m.a.w. q_k is een cyclische coördinaat).

Wij hebben, als we werken met veralgemeende coördinaten q_k:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Als een bepaalde q_k niet voorkomt in de Lagrangiaan (evt. komt $\dot{q}_k$ wel voor!) dan noemt men q_k een cyclische coördinaat. Er geldt dan automatisch dat $\partial L / \partial q_k = 0$; uit de Lagrangevergelijking volgt voor p_k:

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} p_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

zodat het toegevoegd moment van een cyclische coördinaat altijd 0 is. □

(17)

Onderstel een conservatief systeem, en stel dat een veralgemeende coördinaat correspondeert met een translatie van het systeem in een bepaalde richting. Toon aan dat als de potentiaal invariant is onder een verandering van deze coördinaat, de projectie van de totale impuls volgens deze richting een behouden grootheid is.

Stel dat als een bepaalde coördinaat q_1 verandert met een infinitesimaal bedrag dq_1, het hele systeem een translatie ondergaat over dq_1 in een vaste richting langs eenheidsvector $\vec{n}$. De Cartesische coördinaten van de deeltjes, uitgedrukt met veralgemeende coördinaten, voldoen dus aan:

$$\vec{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \ldots) = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots) + (dq_1)\vec{n},$$

zodat een constante vector wordt bekomen voor

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \vec{n} \qquad (1.$$

Dit komt overeen met een verschuiving in de richting $\vec{n}$ van de oorsprong van het Cartesisch assenstelsel. De kinetische energie kan niet afhangen van de keuze van de oorsprong, zodat

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \qquad (2)$$

(2) volgt ook uit de formules. Als de baan $\vec{r}_i(t) \equiv \vec{r}_i(q_k(t))$, dan geldt voor het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \qquad (i)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_1} = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k \overset{(1)}{=} \sum_k \frac{\partial \vec{n}}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0,$$

de Cartesische snelheden hangen dus niet af van de door ons gekozen translatiecoördinaat die voldoet aan (1), wat logisch is. De kinetische energie $T = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$ hangt dus evenmin van q_1 af.

We vinden dan voor de Lagrangiaan:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} \overset{(2)}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_1},$$

maar we beschouwen een conservatief systeem, dus $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$, hier:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt} p_1 = \dot{p}_1 \rightsquigarrow \dot{p}_1 = Q_1 \qquad (3)$$

We werken beide leden van de rechtse vgl. in (3) uit. Voor de veralgemeende kracht Q_1:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \overset{(1)}{=} \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot \vec{n} = \vec{F} \cdot \vec{n}, \qquad (4)$$

niets anders dan de component van de totale kracht $\vec{F}$ in de richting $\vec{n}$.

Voor het moment toegevoegd aan q_1 gebruiken we de definitie van p_1, ermee rekening houdend dat we met conservatieve krachten werken (die enkel van de coördinaten afhangen), dus $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$.

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1}$$

Maar uit (i) volgt $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}$, dus:

$$p_1 = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{n} = \vec{P}\cdot\vec{n}, \tag{5}$$

gegeven door de component van de totale impuls $\vec{P}$ in de richting $\vec{n}$.
(5) en (4) in de Lagrangevergelijking (3) levert:

$$\dot{\vec{P}}\cdot\vec{n} = \vec{F}\cdot\vec{n}. \tag{6}$$

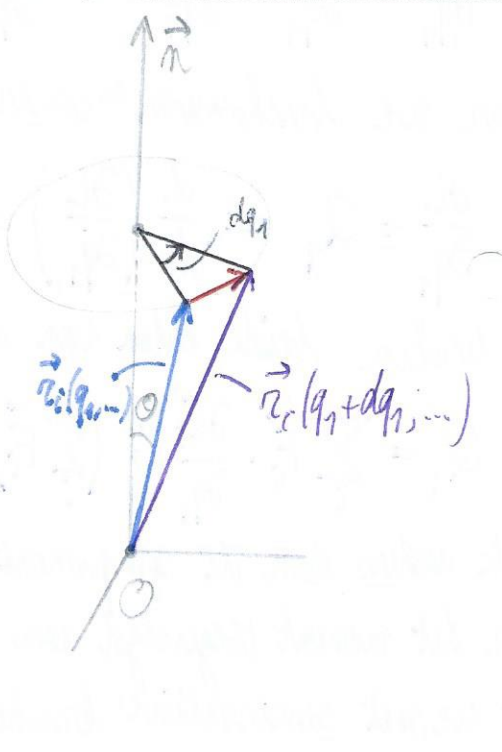
Nu beschouwen we het geval dat q_1 een cyclische coördinaat is. In dit geval is

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0,$$

want V hangt niet af van q_1. Dus geldt er dat $\dot{p}_i = 0$, m.a.w. p_i is een behouden grootheid, zodat ook $\vec{P}\cdot\vec{n}$ constant is in de tijd. □

18 Onderstel een conservatief systeem, en stel dat een veralgemeende coördinaat correspondeert met een rotatie van het systeem rond een bepaalde as. Toon aan dat als de potentiaal invariant is onder een verandering van deze coördinaat, de projectie van het totaal draaimoment volgens deze richting een behouden grootheid is.

Stel dat als een bepaalde coördinaat q_1 verandert met een infinitesimaal bedrag dq_1, het hele systeem een rotatie ondergaat over een hoek dq_1 rond een as met vaste richting $\vec{n}$. De Cartesische coördinaten van de deeltjes, uitgedrukt met veralgemeende coördinaten, voldoen dus aan:



$$\vec{r}_i(q_1+dq_1, q_2,\dots) = \vec{r}_i(q_1,q_2,\dots) + (dq_1)\,\vec{n}\times\vec{r}_i(q_1,q_2,\dots)$$

zodat:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \vec{n}\times\vec{r}_i \tag{7}$$

Dit komt overeen met een rotatie van het Oxyz Cartesisch assenkruis rond een as met richting $\vec{n}$ door de oorsprong O. De kinetische energie kan niet afhangen van de keuze van de oriëntatie van het assenstelsel zodat $\partial T/\partial q_1 = 0$. Dit geeft voor de

Lagrangiaan, wetende dat we werken in een conservatief systeem:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \qquad (2)$$

M.b.v. (2) vinden we voor de Lagrangevergelijking voor q_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} \overset{(2)}{=} Q_1 \rightsquigarrow \dot{p}_1 = Q_1 \qquad (3)$$

We zoeken opnieuw uitdrukkingen voor p_1 en Q_1:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \overset{(1)}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{n} \cdot \vec{N} \qquad (4)$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \vec{n} \cdot \vec{L} \qquad (5)$$

(5) en (4) in (3):

$$\dot{\vec{L}} \cdot \vec{n} = \vec{N} \cdot \vec{n} \qquad (6)$$

Als V niet afhangt van q_1, dan is q_1 een cyclische coördinaat. In dat geval is p_1 een behouden grootheid, m.a.w. $\vec{L} \cdot \vec{n}$ is constant in de tijd. □

2.. BEHOUD VAN ENERGIE

> (19) Toon aan dat in geval van holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen en conservatieve gegeven krachten, de Hamiltoniaan van het systeem een behouden grootheid is.

Gezien het gegeven hangt de uitdrukking van de Cartesische coördinaten niet expliciet van de tijd af:

$$\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_g})$$

Dit geeft dus voor het resulterend verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \qquad (1)$$

Hieruit volgt voor de kinetische energie T:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 = \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right), \tag{2}$$

een homogene veelterm van de tweede graad in de veralgemeende snelheden. Ook de potentiaal is niet expliciet van de tijd afhankelijk, omdat we werken met conservatieve krachten. Met deze aannames is ook de Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k)$ niet expliciet van de tijd afhankelijk. We hebben voor haar totale tijdsafgeleide:

$$\frac{d}{dt} L(q_k(t), \dot{q}_k(t)) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \tag{3}$$

We substitueren de Lagrangevergelijking,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

in (3):

$$\frac{d}{dt} L(q_k(t), \dot{q}_k(t)) = \sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \tag{4}$$

Het rechterlid is niets anders dan de totale tijdsafgeleide van een functie $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$, kijk maar:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) = \sum_k \left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{d}{dt}\dot{q}_k\right)\right\}$$

Met dit nieuw gegeven hebben we voor (4):

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k) = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left\{\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)\right\} = 0 \tag{5}$$

De functie $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$ wordt de Hamiltoniaan h genoemd en is duidelijk behouden. □

20

Toon aan, via de stelling van Euler, dat in dit geval de Hamiltoniaan correspondeert met de totale energie van het systeem.

Laat ons beginnen met het formuleren van de stelling van Euler voor een homogene functie van graad n:

$$\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots) = n f(x_1, x_2, \ldots)$$

Uit vgl. (2) van 19 weten wij dat de kinetische energie een homogene veelterm van graad 2 in de veralgemeende snelheden is, waar wij dus de stelling van Euler kunnen op toepassen:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \quad (6)$$

De discussie is beperkt tot een conservatief systeem $(\partial V/\partial \dot{q}_k = 0)$, zodat

$$h = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L \quad (7)$$

Gelet op (6) en $L = T - V$ wordt dit:

$$h = 2T - (T - V) = T + V$$

□

21 Ga na wat in geval van conservatieve gegeven krachten, maar tijdsafhankelijke holonome bindingen, de gevolgen zijn voor de Hamiltoniaan van het systeem.

De transformatie naar veralgemeende coördinaten (die de tijdsafhankelijke bindingen opleggen), bevatten nu een expliciete tijdsafhankelijkheid,

$$\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_k, t)$$

Dus wordt het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (8)$$

De kinetische energie T is niet langer een holonome veelterm van de 2e graad, maar bevat eveneens termen van 0e en 1e graad:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0, \quad (9)$$

met $$T_2 = \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right), \text{ net als (2) in (19)} \tag{10}$$

$$T_1 = 2 \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \text{ (dubbelproduct)} \tag{11}$$

$$T_0 = \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \tag{12}$$

Conservatieve krachten, afgeleid uit een potentiaal $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i)$, die enkel van de Cartesische coördinaten afhangt. Drukt men deze uit met veralgemeende coördinaten, dan zien we dat de potentiaal nu ook een expliciete tijdsafhankelijkheid bevat: $V \equiv V(q_k, t)$. De Lagrangiaan $L = T - V \equiv L(q_k, \dot{q}_k, t)$ hangt nu dus wel degelijk expliciet van de tijd af, en we vinden voor de totale tijdsafgeleide een meer algemene uitdrukking dan (3):

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{13}$$

Het systeem voldoet nog steeds aan de Lagrangevergelijkingen $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)$, dus wordt (13):

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right\} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

Uit (14) kan geen energiebehoud geformuleerd worden, wat logisch is vermits via de tijdsafhankelijke bindingen energie aan het systeem wordt overgedragen.

Wat de Hamiltoniaan betreft kan men niet meer stellen dat deze noodzakelijk correspondeert met de totale energie. Gelet op de definitie van de Hamiltoniaan en vgl. (9), (10), (11), (12):

$$h = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (T - V) = T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = T_2 - T_0 + V$$

De kinetische termen $T_2 - T_0$ komen duidelijk niet overeen met de kinetische energie $T = T_0 + T_1 + T_2$ tenzij $T_0 = T_1 = 0$, een voorwaarde die uitdrukt dat de transformatie van Cartesische naar

HOOFDSTUK 3

HET CENTRALE KRACHTEN PROBLEEM

G3.1 REDUCTIE VAN 2- NAAR 1-LICHAAMSPROBLEEM

(22) Toon aan, via de Lagrangevergelijkingen, dat de beweging van 2 deeltjes die interageren via conservatieve krachten, equivalent is met enerzijds de vrije beweging van het zwaartepunt, anderzijds de beweging van 1 deeltje met gereduceerde massa onder een potentiaal die enkel afhangt van de relatieve positie van de 2 deeltjes.

Twee deeltjes met massa m_1 en m_2, die op elkaar een kracht uitoefenen. We onderstellen de kracht conservatief, dus afkomstig van een potentiaal V:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_2 V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21}$$

V hangt dus enkel af van de verschilfunctie $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, want is onafhankelijk van de arbitraire keuze van de oorsprong van het Cartesisch assenstelsel.

Er zijn 6 vrijheidsgraden, corresponderend met de Cartesische componenten van de positievectoren van de 2 deeltjes. Veralgemeende coördinaten: (i) de positievector $\vec{R}$ van het COM (ii) de verschilvector $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1+\vec{r})\right) = \frac{\vec{r}_1}{m_1+m_2}(m_1+m_2) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} = \vec{R} + \left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Afleiden naar de tijd levert het verband tussen Cartesische snelheden en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$$

Nu drukken we de kinetische energie uit a.h.v. veralgemeende snelheden:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{r}}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{r}}_2\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}}\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{\vec{R}}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}\underbrace{\left(\frac{m_2+m_1}{m_1+m_2}\right)}_{1}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\right)(-1+1)}_{0} \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{\vec{R}}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2
\end{aligned}$$

En de Lagrangiaan $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{\vec{R}}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(\vec{r})$$

De potentiaal hangt enkel van $\vec{r}$ af. De positie van het massamiddelpunt $\vec{R}$ komt niet voor in L, bijgevolg zijn de drie componenten van $\vec{R}$ cyclische coördinaten, en is $\dot{\vec{R}}$ constant in de tijd: $\vec{R}$ beweegt met een constante snelheid.

De overige termen hangen niet af van $\vec{R}$ of $\dot{\vec{R}}$, en zijn precies wat we zouden verwachten voor een krachtbron in de oorsprong en een enkel deeltje op een afstand $\vec{r}$ er van, met als massa

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2},$$

de gereduceerde massa, dat beweegt in een potentiaal $V(\vec{r})$ opgewekt door de krachtbron. □

G3.2 BEWEGINGSVERGELIJKINGEN EN EERSTE INTEGRALEN VAN DE BEWEGING

23

Toon aan dat voor 1 deeltje onderworpen aan een conservatieve centrale kracht, de beweging plaatsvindt in een vlak, nl. het vlak door het krachtcentrum loodrecht op het draaimoment, dat een behouden grootheid is.

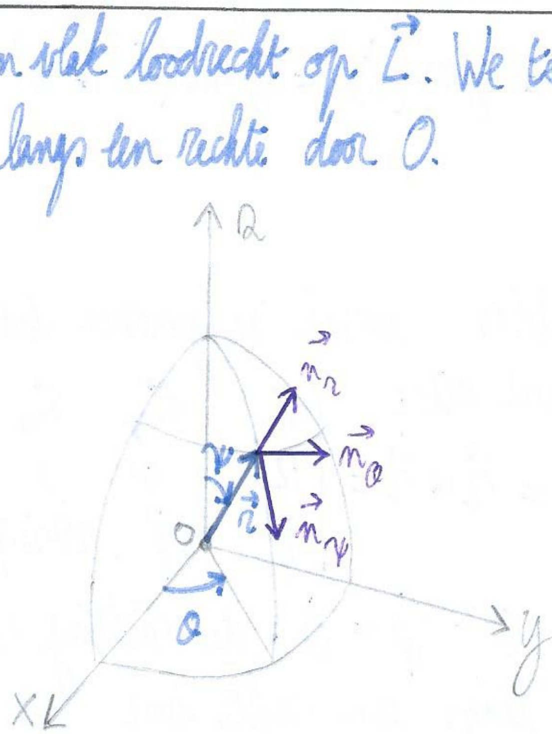
Bij een centrale kracht is $\vec{F} \parallel \vec{r}$, zodat het krachtmoment $\vec{N} = \vec{F} \times \vec{r}$ rond O verdwijnt. Omdat $\dot{\vec{L}} = \vec{N} = \vec{0}$, is $\vec{L}$ een behouden grootheid; $\vec{L}$ is een vaste vector waar $\vec{r}(t)$ altijd orthogonaal opstaat wegens $\vec{L} = \vec{r}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t)$. Bijgevolg speelt de beweging zich af in een vlak door O loodrecht op $\vec{L}$.

Beweging o.i.v. een centrale kracht is beweging in een vlak (altijd). □

2.

Ga over op bolcoördinaten en bespreek het particuliere geval als het draaimoment rond het krachtcentrum verdwijnt en het deeltje op een rechte door het krachtcentrum beweegt.

$\vec{L} = \vec{0}$: het is niet zinvol om te spreken over een vlak loodrecht op $\vec{L}$. We tonen aan dat in dit specifieke geval de beweging gebeurt langs een rechte door O.



Als veralgemeende coördinaten kiezen we bolcoördinaten (r, ψ, θ) gerelateerd met de Cartesische Oxyz-coördinaten (x, y, z) via:

$$x = r \sin\psi \cos\theta$$
$$y = r \sin\psi \sin\theta$$
$$z = r \cos\psi$$

De tijdsafgeleide levert het verband tussen de Cartesische snelheidscomponenten $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ en de veralgemeende snelheden $(\dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$:

$$\dot{x} = \dot{r} \sin\psi \cos\theta + r\dot{\psi} \cos\psi \cos\theta - r\dot{\theta} \sin\psi \sin\theta$$
$$\dot{y} = \dot{r} \sin\psi \sin\theta + r\dot{\psi} \cos\psi \sin\theta + r\dot{\theta} \sin\psi \cos\theta$$
$$\dot{z} = \dot{r} \cos\psi - r\dot{\psi} \sin\psi \; (+ r\dot{\theta} \cdot 0)$$

We willen dit nu samenvatten in termen van 3 orthogonale eenheidsvectoren $(\vec{n}_r, \vec{n}_\psi, \vec{n}_\theta)$ waarvan de Cartesische componenten zijn gegeven door:

$$\vec{n}_r = (\sin\psi\cos\theta, \sin\psi\sin\theta, \cos\psi)$$

$$\vec{n}_\psi = (\cos\psi\cos\theta, \cos\psi\sin\theta, -\sin\psi)$$

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Men vindt deze makkelijk door in de voorafgaande 3 vgl^{en} telkens de niet-repeterende termen in de eenheidsvectoren te schrijven, dan ben je daar vanaf (de overige kan men voorop zetten). Men kan nagaan dat $\vec{n}_r \perp \vec{n}_\psi \perp \vec{n}_\theta$ (want inproducten 0) en dat het om eenheidsvectoren gaat (normen zijn 1).

Nu kan men de Cartesische snelheidsvector $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ schrijven als:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{n}_r + r\dot{\psi}\vec{n}_\psi + r\dot{\theta}\sin\psi\,\vec{n}_\theta$$

En de kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + r^2(\sin^2\psi)\dot{\theta}^2\right) \qquad (1)$$

Een tweede macht van een som met eenheidsvectoren is gewoon de som der kwadraten, daar de heterogene termen wegvallen vanwege $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k = \delta_{ik}$

We hebben vooraf aangenomen dat $\vec{L} = \vec{0}$, voor het centrale kracht probleem implicieert dit:

$$0 = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{n}_r & \vec{n}_\psi & \vec{n}_\theta \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\psi} & r\dot{\theta}\sin\psi \end{vmatrix} = r^2\dot{\psi}\,\vec{n}_\theta - r^2\dot{\theta}\sin\psi\,\vec{n}_\psi$$

(want $\vec{r} = r\vec{n}_r$)

Zodat $0 = \dot{\psi} = \dot{\theta}$: de richting van het deeltje blijft constant, en de beweging is dus langs een rechte door de oorsprong. □

(25) Toon aan dat bij een algemene beweging o.i.v. een conservatieve, centrale kracht de perksnelheid constant is, d.i. het oppervlak dat de positievector van het deeltje in zijn vlakke baan rond het krachtcentrum beschrijft is constant in de tijd.

We noemen $|\vec{L}| = l > 0$ de constante grootte van $\vec{L}$. We zoeken vooreerst de waarde van l.
Uit ㉔(1) halen we de Lagrangiaan $L = T - V$ in vlakke poolcoördinaten $(\psi = \frac{\pi}{2}, \dot{\psi} = 0)$.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

En het toegevoegd moment:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \vec{n}_z \cdot \vec{L} = l$$

θ is cyclisch, dus $\partial L / \partial \theta = 0$, zodat ook $\dot{p}_\theta = 0$, en l constant is (wat we al wisten).
De constante perkensnelheid bij beweging o.i.v. een centrale kracht is hier een onmiddellijk gevolg van. In tijd dt zwiept de positievector over een oppervlak

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Dus vinden we voor de perkensnelheid:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m} = c^{te}$$

□

㉖ Toon aan dat, via behoud van draaimoment, de bewegingsvergelijking voor een deeltje in een conservatief krachtveld kan gereduceerd worden tot een 2e orde differentiaalvergelijking in de afstand tot het krachtcentrum, $r(t)$.

We hadden ㉔(1) in poolcoördinaten:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \text{ en } \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad (1)$$

Invullen in de Lagrangevergelijking leert:

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

Behoud van draaimoment $m r^2 \dot{\theta} = l$ kan nu gebruikt worden om de $\dot{\theta}$-afhankelijkheid te elimineren uit vgl. (2):

$$m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

Hierdoor hebben we de bewegingsvergelijking voor r ontkoppeld van die van θ. Wat overblijft is een 2e-orde differentiaalvergelijking voor de onbekende functie $r(t)$. □

(27)

Toon aan dat via behoud van zowel energie als draaimoment, het probleem kan gereduceerd worden tot een 1e orde differentiaalvergelijking in $r(t)$. Geef een formele oplossing $r(t)$, $\theta(t)$.

Ook de energie is een eerste integraal van de beweging (de energie blijft behouden):

$$E = T + V = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + V(r)$$

Via behoud van draaimoment $mr^2\dot{\theta} = l$ kan opnieuw de $\dot{\theta}$-afhankelijkheid geëlimineerd worden:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{l^2}{m^2 r^4}\right) + V(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \qquad (1)$$

Wat overblijft is een 1e-orde differentiaalvergelijking in $r(t)$. We zoeken een principiële oplossing: los (1) op naar $\dot{r}$:

$$\dot{r} = (\pm)\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}, \qquad (2)$$

waarbij we aannemen dat voor dit stuk van de baan $\dot{r} > 0$. Uit (2) en $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ volgt

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = dt \qquad (3)$$

Stel dat op begintijdstip t_0 de afstand $r(t_0)$ is. Integreer (3) van t_0, $r(t_0)$ naar t, r:

$$\int_{r(t_0)}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 \qquad (4)$$

Dit levert $t(r)$, dus t als functie van r. De inverse functie $r(t)$ kan dan, tenminste formeel, bepaald worden.

De hoekevolutie $\theta(t)$ kan worden bepaald uit het draaimoment $l = mr^2\dot{\theta}$, nu $r(t)$ bekend is

$$l = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \frac{l}{m r^2(t)} dt$$

Als de hoek op beginttijdstip t_0 gelijk is aan $\theta(t_0)$, dan volgt door integratie

$$\theta - \theta(t_0) = \frac{l}{m}\int_{t_0}^{t} dt\,\frac{1}{r^2(t)}$$

De baan van het deeltje in vlakke poolcoördinaten, $r(t)$ en $\theta(t)$, is nu gekend als functie van de tijd. □

G3.3 EQUIVALENT 1-DIMENSIONAAL PROBLEEM EN KLASSIFICATIE VAN ORBITALEN

(28)

(a) Toon aan dat de 1e-orde radiale bewegingsvergelijking equivalent is met een 1-dimensionaal probleem met fictieve potentiaal gelijk aan de som van de echte potentiaal en de centrifugale bijdrage. (b) Schets het verloop van de fictieve potentiaal in geval van de attractieve invers-kwadratische krachtwet, (c) en geef een kwalitatieve bespreking van de beweging voor verschillende waarden van de energie.

(a) We definiëren de fictieve potentiaal $V'(r)$ als:

$$V'(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2},$$

V' is dan de potentiële energie voor een fictief 1-dimensionale beweging (langs de "r-as") en $V(r)$ de echte potentiaal van het tweedimensionaal probleem (poolcoördinaten).

Inderdaad vinden wij:

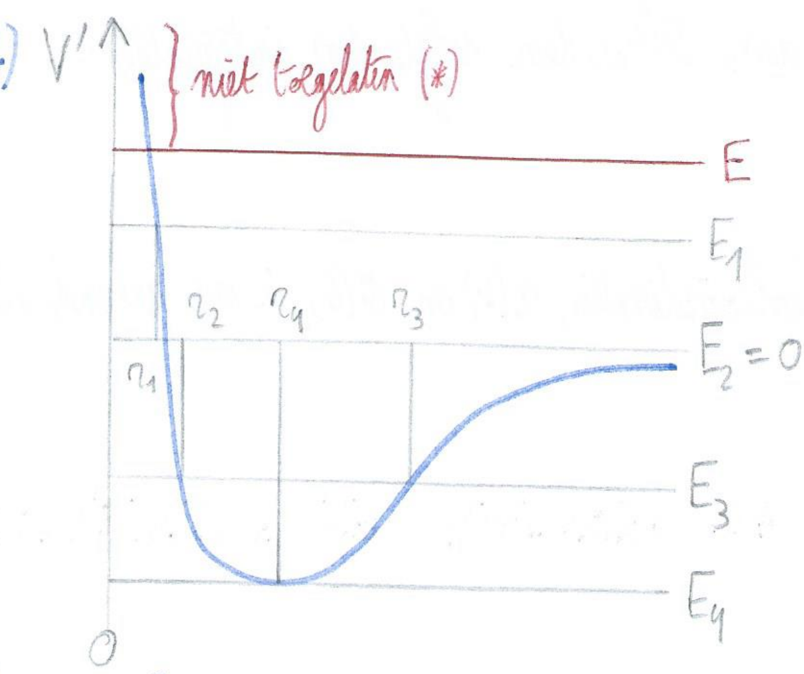
$$F'(r) = -\frac{dV'}{dr} = -\frac{dV}{dr} + \frac{l^2}{mr^3},$$

wat overeen komt met (26)(2); $m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$, met $F'(r) = m\ddot{r}$.

Ook voor de andere eerste integraal van de beweging, de energie E, blijkt er consistentie:

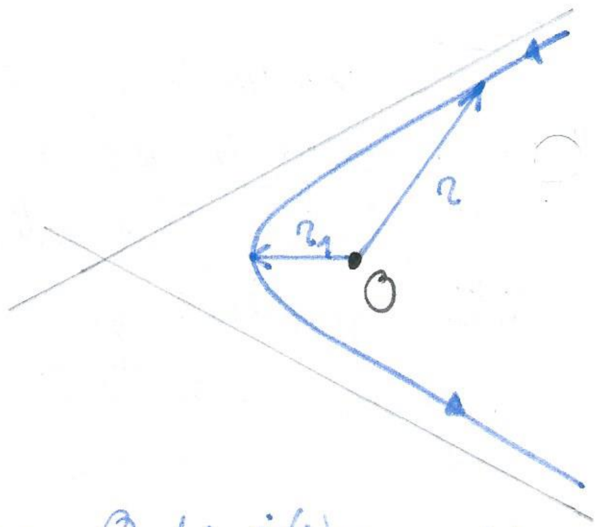
$$E' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \overset{(23)(1)}{=} E$$

(b)



(*) dit gebied is verboden in de klassieke mechanica, niet in de kwantummechanica

(c) • $\underline{E = E_1 > 0}$



Er is slechts 1 afstand r_1 waarvoor $V'(r) = E_1$. Het gebied $r < r_1$ is verboden; het deeltje kan niet dichter bij het krachtcentrum komen dan r_1. Stel dat het deeltje op tijdstip t_0 vertrekt op een afstand $r_0 > r_1$ naar het krachtcentrum toe, dus met negatieve radiale snelheid $\dot{r}(t_0) < 0$. Omdat $\dot{r}(t)$ een continue functie is, kan ze slechts van teken omklikken als er ook een moment $t > t_0$ is waarvoor $\dot{r}(t) = 0$. Energiebehoud $E_1 = \frac{1}{2} m\dot{r}^2(t) + V'(r(t))$ leert dat dit gebeurt wanneer het deeltje genaderd is tot een afstand r_1, waar $E_1 = V'(r(t))$. Hierna verwijdert het deeltje zich weer van het krachtcentrum, de radiale snelheid $\dot{r}(t)$ blijft positief.

→ ONGEBONDEN BEWEGING: het deeltje bereikt een oneindige afstand van het krachtcentrum

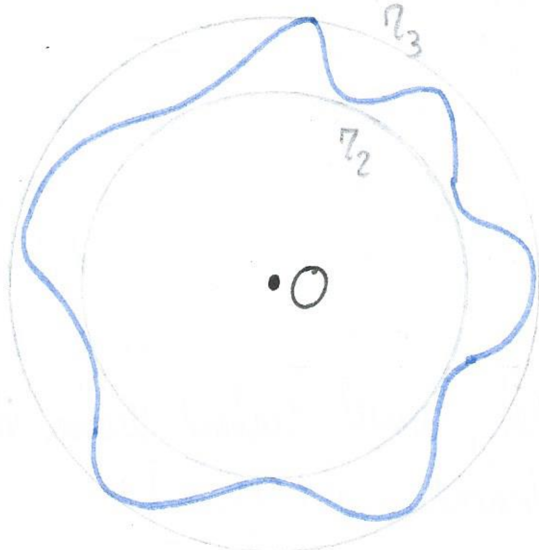
• $\underline{E = E_2 = 0}$

Zelfde kwalitatieve opmerkingen als hierboven; ook hier 1 keerpunt. Nu zal wegens energiebehoud

$$0 = E_2 = \frac{1}{2} m\dot{r}^2(t) + V'(r(t))$$

op grote afstand $r \to +\infty$ de potentiaal $V'(r) \to 0$ verdwijnen, en dus zal de

• $E = E_3 < 0$



Dit geval is essentieel anders: er zijn nl. twee afstanden r_2, r_3 waarvoor $E = V'(r)$: de apsidale afstanden. Enkel het gebied $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$ is toegelaten voor de beweging (hier kan $T > 0$). We hebben m.a.w. een minimale afstand r_2 en een maximale afstand r_3.

Stel dat het deeltje op een bepaald tijdstip op een afstand r met $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$ zit, met $\dot{r} < 0$. Het blijft dan het krachtcentrum naderen, tot het de minimale afstand r_2 bereikt met $\dot{r} = 0$ (keerpunt). Dan wordt $\dot{r} > 0$, het deeltje verwijdert zich van het krachtcentrum tot r_3 ($\dot{r} = 0$), begint weer naar het krachtcentrum toe te bewegen enz.

→ GEBONDEN BEWEGING: het deeltje is 'gevangen' tussen een minimale en een maximale afstand.

In onze tekening is de orbitaal gesloten, maar dat is niet noodzakelijk.

• $E = E_4$

De energie correspondeert met een minimum van de $V'(r)$-curve, bereikt voor een afstand r_4. Er is, gelet op energiebehoud, slechts 1 mogelijke afstand r_4 waarop het deeltje kan bewegen: de orbitaal van het deeltje is een cirkelbaan met straal r_4; op ieder tijdstip geldt $r(t) = r_4$.

Gelet op het draaimomentbehoud, $mr^2\dot{\theta} = l = c^{te}$, volgt dat

$$\dot{\theta}(t) = \frac{l}{m r_4^2} = c^{te}$$

De hoeksnelheid is voor een cirkelbeweging o.i.v. een centrale kracht noodzakelijkerwijs constant, we hebben te maken met een eenparige cirkelbeweging. □

3.5 DIFFERENTIAALVERGELIJKING VOOR DE ORBITAAL

(29)

Zet de 1e-orde radiale differentiaalvergelijking in $r(t)$ om in een rechtstreekse differentiaalvergelijking voor de orbitaal $u(\theta)$ (met $u = 1/r$).
Bespreek, in geval van een gebonden beweging tussen twee keerpunten, de voorwaarde voor een gesloten orbitaal.

Een simpel verband tussen infinitesimale toenames dt en $d\theta$ volgt uit draaimomentbehoud $l = mr^2\dot{\theta}$:

$$dt = \frac{mr^2}{l}\, d\theta$$

Met de kettingregel vinden we zo een substitutie waarmee we de tijdsafgeleide van een functie $f(\theta(t))$ kunnen vervangen door:

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta} \tag{1}$$

We hadden voor de energie $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$, en met (1):

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r), \tag{2}$$

een 1e-orde differentiaalvergelijking voor de orbitalen.
Overgang naar de functie $u(\theta) = 1/r(\theta)$ is gerieflijker, met $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$:

$$E = \frac{1}{2}\cancel{m}\,\frac{l^2\cancel{u^4}}{m^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\cancel{u^4}}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2u^2}{2m} + V$$

$$\Rightarrow \frac{2mE}{l^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{l^2}V \tag{3}$$

We lossen dit op naar $du/d\theta$ (stuk van de baan waar $dr/d\theta > 0$):

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V} \tag{4}$$

(3) of (4) is dan de gezochte differentiaalvergelijking. Wanneer is de orbitaal gesloten?
We halen uit (4) voor de orbitaal:

$$d\theta = -\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V}} \tag{5}$$

Voor een gebonden beweging tussen twee keerpunten levert vgl. (5) de hoek tussen de voerstralen naar de keerpunten als

$$\theta_{max} - \theta_{min} = -\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V(u)}}$$

Als deze hoek gelijk is aan $2\pi q$, $q \in \mathbb{Q}$, dan sluiten de baansegmenten op mekaar aan, en is de orbitaal gesloten. □

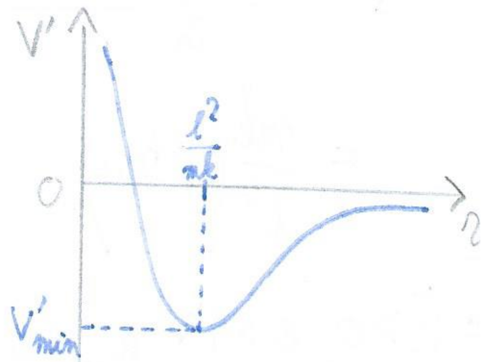
G3.7 HET KEPPLER VRAAGSTUK

(30) In geval van een invers kwadratische krachtwet: (a) voer de eccentriciteit in en (b) bespreek de keerpunten voor de verschillende waarden van de energie $E>0$, $E<0$ en $E=0$.

a) Dit geldt bijvoorbeeld voor het gravitatieveld van de zon (vast in oorsprong): attractieve kracht $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{r}_r$, met corresponderende potentiaal $V = -\frac{k}{r}$.

Dit geeft voor de fictieve 1-dimensionale potentiaal:

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \qquad (1)$$



En we gekende plot. We zoeken V'_{min} met de afgeleide $\frac{dV'}{dr} = 0$:

$$\frac{dV'}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{\cancel{2}l^2}{\cancel{2}mr^3} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{r^2}\left(k - \frac{l^2}{mr}\right) \Leftrightarrow r = \frac{l^2}{mk}$$

$$V'_{min} = -k\left(\frac{mk}{l^2}\right) + \frac{l^2}{2m}\left(\frac{mk}{l^2}\right)^2 = \frac{-2mk^2 + mk^2}{2l^2} = -\frac{mk^2}{2l^2} \qquad (4)$$

Fysisch zinvolle energieën voldoen dus aan $E \geq -\frac{mk^2}{2l^2} \Leftrightarrow \frac{2El^2 + mk^2}{2l^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2El^2}{mk^2} \geq 0$

Nu definiëren we de eccentriciteit e als:

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \qquad (3)$$

- $E>0 \Rightarrow e>1$
- $E=0 \Rightarrow e=1$
- $E<0 \Rightarrow e<1$

De minimale waarde voor e, $e=0$, wordt bereikt voor $E=V'_{min}$.

(b) Afhankelijk van de waarde van E zijn er 1 of 2 keerpunten. Dit zijn afstanden die voldoen aan $E=V'(r)$, of nog wegens (1): die de wortels zijn uit:

$$E=-\frac{k}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}$$

We voeren opnieuw de variabele $u=1/r$ in:

$$E=-ku+\frac{l^2}{2m}u^2 \Leftrightarrow 0=u^2-\frac{2mk}{l^2}u-\frac{2mE}{l^2} \qquad (4)$$

$$\left(\text{discriminant}=\text{"}b^2-4ac\text{"}=\frac{4m^2k^2}{l^4}+4\,\frac{2mEl^2}{l^4}=\frac{4m^2k^2+8mEl^2}{l^4}\right)$$

Dan zijn de 2 reële wortels:

$$u_\pm=\text{"}\frac{-b\pm\sqrt{\text{discriminant}}}{2a}\text{"}=\frac{\frac{2mk}{l^2}\pm\frac{\sqrt{4m^2k^2+8mEl^2}}{l^2}}{2}=\frac{\cancel{2}mk\pm\cancel{2}mk\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}}{\cancel{2}l^2}$$

$$=\frac{mk}{l^2}(1\pm e) \qquad (5)$$

- $\underline{\underline{E>0,\ e>1}}$: $u_-<0$ en is fysisch niet relevant. Enkel de u_+ oplossing is altijd aanwezig, en definiëert het perihelion $r_{peri}=1/u_+$, d.i. de afstand der dichtste nadering;
- $\underline{\underline{E<0;\ e<1}}$: Zowel u_- als u_+ zijn gedefinieerd. u_- definieert het aphelion, $r_{apo}=1/u_-$, d.i. de **maximale afstand**.
- $\underline{\underline{E=0;\ e=1}}$: voor dit specifieke geval hebben we voor het perihelion $\frac{l^2}{2mk}$ (d.i. het snijpunt van de V'-plot) en een aphelion op oneindig, wat in overeenstemming is met de grafiek.

□

31 Toon aan dat de mogelijke orbitalen kegelsneden zijn, en dat de verschillende waarden van de energie corresponderen met respectievelijk ellipsen, parabolen en hyperbolen.

We hebben de orbitaalvgl. 29 (4):

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2}V}, \qquad (1)$$

waarin we $V = -k/r = -ku$ substitueren:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 + \frac{2mk}{\ell^2}u} = -\frac{mke}{\ell^2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Updownarrow \qquad \text{met } x = \frac{1}{e}\left(\frac{\ell^2}{mk}u - 1\right)$$

$$\frac{mke}{\ell^2}d\theta = -\frac{du}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nu kennen we afgeleide van onze golie vriend de boogtangens: $\frac{d}{dx}\mathrm{Arccos}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{mke}{\ell^2}\int d\theta = -\int\frac{du}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{\cancel{mke}}{\cancel{\ell^2}}\theta = +\frac{\cancel{mke}}{\cancel{\ell^2}}\mathrm{Arccos}\,x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{e}\left(\frac{\ell^2}{mk}u - 1\right) = \cos\theta \qquad (2)$$

Vergelijking (2) oplossen naar u levert voor de orbitaal:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2}(1 + e\cos\theta) \qquad (3)$$

Dit is de vergelijking in poolcoördinaten van een kegelsnede met de oorsprong in een brandpunt en eccentriciteit e. Voor $\theta = 0$ vinden we het perihelion terug, dit is in overeenstemming met 30 (5). De 'dichtste nadering' bevindt zich dus op de positieve x-as.

- $E > 0 : e > 1$ → hyperbool als ongebonden orbitaal;
- $E = 0 : e = 1$ → parabool als ongebonden orbitaal;
- $E < 0 : e < 1$ → ellips als gebonden orbitaal. In het speciale geval $e = 0$ verkrijgt men het bijzondere geval van een cirkelbaan.

(32) **Bespreek de drie wetten van Kepler voor planetenbeweging.**

- De Eerste Wet van Keppler

Een planeet beweegt in een ellips met de zon in 1 van de brandpunten. We hebben dus een negatieve energie, zodat de eccentriciteit $e<1$.

- De Tweede Wet van Keppler

De wet der perken: bij beweging o.i.v. een centrale kracht (e.g. de gravitatiekracht) hurst een constante perksnelheid, of nog: in gelijke tijdsintervallen wordt an zelfde oppervlak doorlopen.

- De Derde Wet van Keppler

Het kwadraat van de omlooptijd van de planeten is evenredig met de derde macht van de grote as van hun ellipsvormige baan.

Merk op dat de constante in de krachtwet gelijk is aan $k = GM_{\odot}m$, zodat de verhouding m/k dezelfde is voor alle planetaire banen (met de zon als oneindig massief beschouwd).

63.9 DE LAPLACE-RUNGE-LENZ VECTOR

(33) **Toon aan dat, in geval van een attractieve invers-kwadratische krachtwet $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$, de LRL-vector $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r}$ een behouden grootheid is, en geef een interpretatie.**

We hebben dus dat $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{1}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$ net als bij de gravitatie. De Newton bewegingsvergelijking $\dot{\vec{p}} - \vec{F} = 0$, vectorieel vermenigvuldigd met het draaimoment, wordt na manipulatie:

$$0 = (\dot{\vec{p}} - \vec{F}) \times \vec{L} = m\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \frac{k}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})$$

Uit het feit dat $\dot{\vec{L}} = 0$ en de identiteit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ volgt dan:

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) + \frac{mk}{r^3}\left((\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}\right) \qquad (1)$$

Nu is de laatste term in (1) ook een totale tijdsafgeleide, meer bepaald die van $-\frac{mk}{r}\vec{r}$:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{mk}{r}\vec{r}\right) = \frac{mk}{r^2}\dot{r}\vec{r} - \frac{mk}{r}\dot{\vec{r}}, \qquad (2)$$

wat lijkt te kloppen voor het verschil in de laatste term in (1), aangezien

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{r}^{\,2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right) = r\dot{r}$$

We vinden dus, na substitutie van (2) in (1):

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}\times\vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r}\right) = \frac{d}{dt}\vec{A} \qquad (3)$$

De LRL-vector is constant in de tijd gedurende de beweging o.i.v. een r^{-2}-type centrale krachtwet, m.a.w. $\vec{A}$ is een behouden vectorgrootheid.

• Interpretatie: $\vec{A}$ staat orthogonaal $\vec{L}$. Inderdaad, in het RL van de definitie $\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r}$ staan beide vectoren orthogonaal op $\vec{L}$. Voor de eerste is dat triviaal waar wegens het vectorieel product, bij de tweede volgt dat uit de definitie voor $\vec{L}$: $\vec{L} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}}$. Bijgevolg is $\vec{A}\cdot\vec{L} = 0$: $\vec{A}$ is een vaste vector in het bewegingsvlak van het deeltje! $\square$

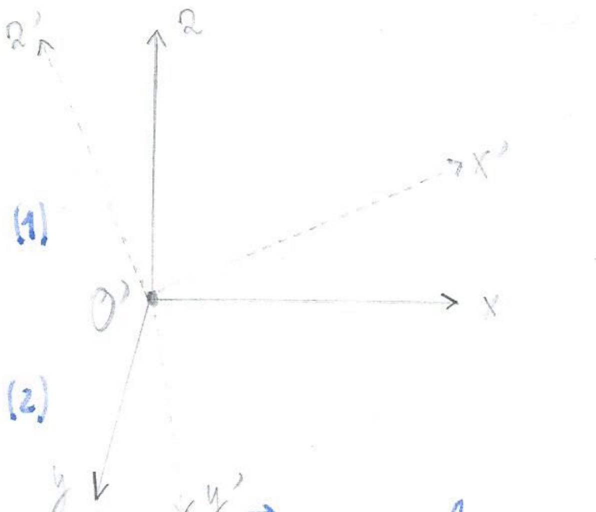
HOOFDSTUK 4

KINEMATICA VAN DE BEWEGING VAN EEN STAR LICHAAM

G4.1 VRIJHEIDSGRADEN VAN EEN STAR LICHAAM

(34) De onderlinge oriëntatie van twee Cartesische assenkruisen met gemeenschappelijke oorsprong kan worden vastgelegd door de richtingscosinussen $\cos\theta_{ij} = \vec{n}_i' \cdot \vec{n}_j$, zijnde de scalaire producten van de eenheidsvectoren volgende de assen van het ene stelsel met die van het andere stelsel. Toon aan dat de componenten van een arbitraire vector in de beide assenkruisen met elkaar verbonden zijn door een lineaire transformatie op basis van de richtingscosinussen.

We hebben dus gegeven $\cos\theta_{ij} = \vec{n}_i' \cdot \vec{n}_j$ met i of $j = 1,2,3$ voor resp. x, y of z. We hebben dat



$$\vec{n}_i = \sum_j (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j')\vec{n}_j' = \sum_j \cos\theta_{ji}\,\vec{n}_j' \qquad (1)$$

$$\vec{n}_i' = \sum_j (\vec{n}_i' \cdot \vec{n}_j)\vec{n}_j = \sum_j \cos\theta_{ij}\,\vec{n}_j \qquad (2)$$

Onze arbitraire vector $\vec{G}$ heeft in $O'xyz$ componenten $G_i = \vec{G}\cdot\vec{n}_i$ en kan dus ontbonden worden als:

$$\vec{G} = \sum_i G_i\vec{n}_i = \sum_i\sum_j G_i\cos\theta_{ji}\,\vec{n}_j' = \sum_j\left(\sum_i G_i\cos\theta_{ji}\right)\vec{n}_j' \qquad (3)$$

En dus hebben wij voor alle componenten in het $O'x'y'z'$-assenkruis:

$$G_j' = \vec{G}\cdot\vec{n}_j' = \sum_i \cos\theta_{ji}\, G_i$$

□

35

Toon aan dat een 3×3-matrix $[\theta]$ met als elementen de richtingscosinussen, een orthogonale matrix is.

We hebben 6 relaties tussen de $\cos\theta_{ij}$, wegens het feit dat de $\vec{n}_i$, evenals de $\vec{n}_i'$, een orthonormale basis vormen. D.w.z.: $\vec{n}_i\cdot\vec{n}_k = \delta_{ik}$, voor $i \leq k$. Uit 34(1) volgt:

$$\vec{n}_i\cdot\vec{n}_k = \sum_{nm} \cos\theta_{ni}\cos\theta_{mk}\, \vec{n}_n'\cdot\vec{n}_m'$$

$$= \sum_{nm} \cos\theta_{ni}\cos\theta_{mk}\,\delta_{nm}$$

$$= \sum_{n} \cos\theta_{ni}\cos\theta_{nk} \qquad (1)$$

Zodat $\delta_{ik} = \sum_n \cos\theta_{ni}\cos\theta_{nk}$. De orthonormaliteitsbetrekkingen van de $\vec{n}_i'$ leiden op analoge wijze tot

$$\vec{n}_i'\cdot\vec{n}_k' = \delta_{ik} = \sum_n \cos\theta_{in}\cos\theta_{kn} \qquad (2)$$

Beschouwen wij nu de 3×3-matrix $[\theta]$ met

$$[\theta]_{ij} = \cos\theta_{ij},$$

dan volgt uit (1) dat $[\theta]^T[\theta] = [1]$, want

$$\delta_{ik} = \sum_n \cos\theta_{ni}\cos\theta_{nk} = \sum_n [\theta]_{ni}[\theta]_{nk} = \sum_n \left([\theta]^T\right)_{in}[\theta]_{nk}$$

$$\Rightarrow \delta_{ik} = \left([\theta]^T[\theta]\right)_{ik} \Rightarrow [\theta]^T[\theta] = [1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Op analoge wijze heeft men dat (2) uitdrukt dat $[O][O]^T = [1]$.
Men mag hieruit besluiten dat $[O]$ een orthogonale matrix is, want

$$[O] \in O(3) \Leftrightarrow [O]^{-1} = [O]^T,$$

dit volgt uit:

$$[O]^T[O] = [1] = [O][O]^T \qquad \square$$

G4.4 DE EULERHOEKEN

(36)

> Toon aan dat $[O]$ een speciale orthogonale matrix is, d.i. $\det[O] = +1$, voor een transformatie tussen assenkruisen met eenzelfde (bijvoorbeeld rechtshandig) karakter, en dat voor de beschrijving van starre lichamen dit de relevante transformaties zijn.

De stand van het assenstelsel vast verbonden aan het lichaam zal wijzigen gedurende de beweging, maar het is duidelijk dat de "handedness" niet verandert (als men een rechtsdraaiende schroef beweegt en ronddraait, wordt dit ook niet opeens een linksdraaiende schroef).

Zij $[P]$ de matrix van de zgn. 'pariteitstransformatie':

$$[P] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -[1],$$

dan ziet men in dat $\det[P] = -1$, en $[P]$ het rechtshandig assenkruis omvormt in een linkshandig: $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$, dus $\vec{n}_1' \times \vec{n}_2' = -\vec{n}_3'$.
Nu kan elke orthogonale 3x3-matrix $[O]$ met $\det[O] = -1$ geschreven worden als $[P](-[O])$, m.a.w. als het product van de pariteitstransformatie en een orthogonale matrix $(-[O])$ waarvoor $\det(-[O]) = +1$. Bijgevolg zullen dergelijke

matrices de handedness van het assenstelsel wijzigen, en moeten zij uitgesloten worden bij de beschrijving van de stand van een star lichaam. Vandaar de beperking tot SO(3)-matrices (met $\det[O]=+1$), die coördinaatstransformaties tussen assenstelsels met dezelfde handedness beschrijven. □

37

Toon aan dat elke transformatie tussen twee Cartesische rechtshandige assenkruisen kan bekomen worden door een opeenvolging van drie eenvoudige rotaties rond coördinaatassen over de Eulerhoeken ϕ, θ, ψ.

Stel dat een initieel $Oxyz$-assenstelsel moet omgezet worden naar $Ox'y'z'$.

1 Rotatie rond de z-as over een hoek ϕ (tegenwijzerzin)

$(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta = z)$

2 Roteer rond de ξ-as over een hoek θ (tegenwijzerzin)

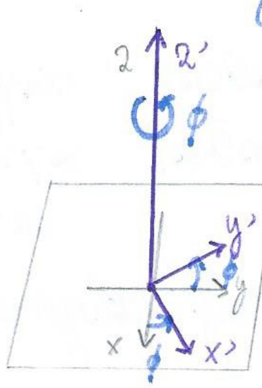
$(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (\xi' = \xi, \eta', \zeta')$

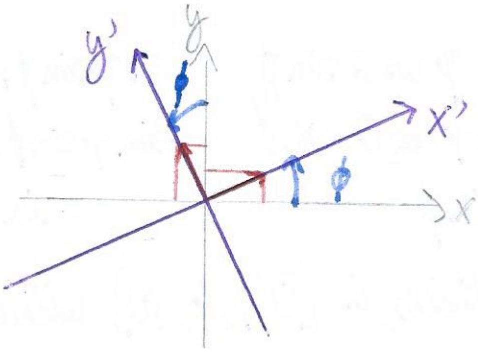
3 Roteer rond de ζ'-as over een hoek ψ: (tegenwijzerzin)

$(\xi', \eta', \zeta') \rightarrow (x', y', \zeta' = z')$

Herinner dat de transformatiematrix $[O]$ gegeven wordt door $[O]_{ij} = \cos\theta_{ij} = \vec{n}_i' \cdot \vec{n}_j$.

Voor 1 hebben wij een rotatie rond de z-as over een hoek ϕ:





$$\begin{cases} \vec{n}_1' = \cos\phi\, \vec{n}_1 + \sin\phi\, \vec{n}_2 \\ \vec{n}_2' = -\sin\phi\, \vec{n}_1 + \cos\phi\, \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3' = \vec{n}_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_1 = \cos\phi \\ \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2 = \sin\phi \\ \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{n}_2' \cdot \vec{n}_1 = -\sin\phi \\ \vec{n}_2' \cdot \vec{n}_2 = \cos\phi \\ \vec{n}_2' \cdot \vec{n}_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{n}_3' \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{n}_3' \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \vec{n}_3' \cdot \vec{n}_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [O_3(\phi)] = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

Op dezelfde manier kunnen wij een transformatiematrix vinden voor een rotatie rond de 1e as over een hoek θ (2):

$$\vec{n}_1' = \vec{n}_1, \quad \vec{n}_2' = \cos\theta\,\vec{n}_2 + \sin\theta\,\vec{n}_3, \quad \vec{n}_3' = -\sin\theta\,\vec{n}_2 + \cos\theta\,\vec{n}_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_1 = 1 \\ \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{n}_2' \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{n}_2' \cdot \vec{n}_2 = \cos\theta \\ \vec{n}_2' \cdot \vec{n}_3 = \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{n}_3' \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{n}_3' \cdot \vec{n}_2 = -\sin\theta \\ \vec{n}_3' \cdot \vec{n}_3 = \cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow [O_1(\theta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(3)$$

En voor 3 hebben wij hetzelfde als 1, nl. een rotatie rond de 3e as. De transformatiematrix die correspondeert met de opeenvolging van drie rotaties beschreven door de Eulerhoeken, kan dan onmiddellijk neergeschreven worden als het product van de drie matrices:

$$[O(\phi,\theta,\psi)] = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Als product van drie $SO(3)$-matrices, is $[O(\phi,\theta,\psi)]$ uiteraard zelf orthogonaal met determinant $+1$. $\square$

G4.6 STELLING VAN EULER OVER DE BEWEGING VAN EEN STAR LICHAAM

(38) Toon aan dat elke SO(3)-matrix $[O]$ een rotatie in de 3-dimensionale ruimte rond een as door de oorsprong beschrijft, m.a.w. toon aan dat een transformatie $[X']=[O][X]$ die de coördinaten van een punt $[X]$ omzet omzet in de coördinaten van een nieuw punt $[X']$ voldoet aan: (1) de grootte van $[X]$ blijft onveranderd, en (2) er is een as door de oorsprong waarvan de punten onveranderd blijven onder de transformatie.

(1) We bewijzen dat de grootte van de positievector(*) niet wijzigt, m.a.w. dat $[X]^T[X] = [X']^T[X']$. Dit is een kenmerkende eigenschap van alle orthogonale matrices:

$$[X']^T[X'] = [X]^T[O]^T[O][X] = [X]^T[1][X] = [X]^T[X]$$

(*) $\vec{r}^{\,2} = x^2+y^2+z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [X]^T[X]$

(2) Dit komt neer op het bewijzen van de aanwezigheid van een rotatie-as, dus aantonen dat $[O]$ een eigenwaarde $+1$ heeft. De corresponderende eigenvector is dan gericht volgens de rotatie-as.

De eigenwaarden λ van $[O]$ voldoen aan de seculiere vergelijking $\det([O]-\lambda[1])=0$. Nu is voor elke orthogonale matrix:

$$([O]-[1])[O]^T = [1]-[O]^T$$

$$\Rightarrow \det([O]-[1])\underbrace{\det[O]}_{=1} = \underbrace{\det([1]-[O])}_{=-\det([O]-[1])}$$

$\det[O]^T = \det[O]$

$\det(-[M]) = (-1)^n \det[A] = (-1)^3\det[A] = -\det[A]$

$$\Rightarrow \det([O]-[1]) = -\det([O]-[1])$$

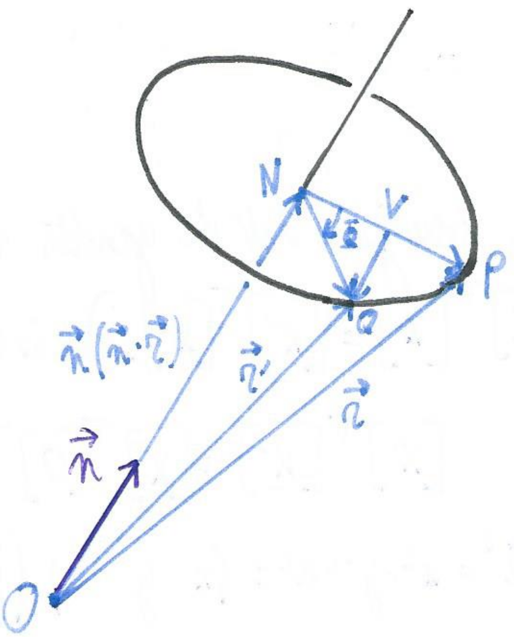
$$\Rightarrow \det([O]-[1]) = 0$$

G4.7 EINDIGE ROTATIES VAN HET ASSENKRUIS

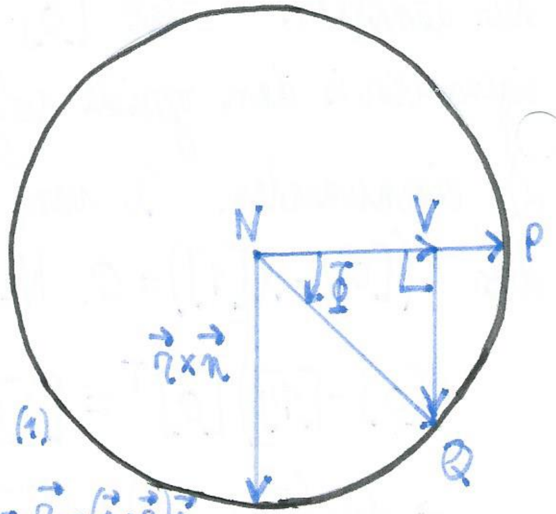
(39) Stel de coördinatentransformatie op voor een rotatie van het assenkruis over een hoek Φ, rond een as door de oorsprong met eenheidsvector $\vec{n}$, i.e. de rotatieformule

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\Phi + \vec{n}(\vec{r}\cdot\vec{n})(1-\cos\Phi) + (\vec{r}\times\vec{n})\sin\Phi$$

Het is hier handiger te redeneren vanuit het actieve standpunt, waarin een punt P met plaatsvector $\vec{r}$ wordt geroteerd over een hoek Φ in <u>wijzerzin</u> naar een nieuw punt Q met plaatsvector $\vec{r}\,'$ in hetzelfde stelsel Oxyz. Dit komt overeen met het passieve standpunt van een rotatie van het assenkruis Oxyz naar Ox'y'z' rond $\vec{n}$, over een hoek Φ in <u>tegenwijzerzin</u>.



Het geroteerde punt Q ligt uiteraard op de cirkel door P loodrecht op $\vec{n}$, met als middelpunt het snijpunt met de rotatie-as N. Verder is V de orthogonale projectie van Q op NP. Er geldt dat



$$\overrightarrow{ON} = (\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n} \quad \text{en} \quad \overrightarrow{NP} = \vec{r} - \overrightarrow{ON} = \vec{r} - (\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n} \qquad (1)$$

De vector $\vec{r}\times\vec{n}$ is orthogonaal op $\vec{n}$ en op $\overrightarrow{NP} = \vec{r} - (\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n}$.
Haar grootte is:

$$|\vec{r}\times\vec{n}| = \left|\left(\overrightarrow{NP} + (\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n}\right)\times\vec{n}\right| = |\overrightarrow{NP}\times\vec{n}| = |\overrightarrow{NP}|,$$

dus ook de straal van de cirkel. Verder hebben wij dat:

$$|\overrightarrow{NV}| = |\overrightarrow{NQ}|\cos\Phi = |\overrightarrow{NP}|\cos\Phi \Rightarrow \overrightarrow{NV} = \cos\Phi\,\overrightarrow{NP} \qquad (2)$$

$$|\vec{VQ}| = |\vec{NQ}| \sin\Phi = |\vec{r}\times\vec{n}| \sin\Phi \quad \Rightarrow \quad \vec{VQ} = \sin\Phi \, \vec{r}\times\vec{n} \qquad (3)$$

Finaal hebben wij dat $\vec{r}\,' = \vec{ON} + \vec{NV} + \vec{VQ}$, waarin wij (1), (2), (3) substitueren:

$$\vec{r}\,' = (\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n} + \cos\Phi\left(\vec{r} - (\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n}\right) + \sin\Phi\,(\vec{r}\times\vec{n})$$

$$= \vec{r}\cos\Phi + \vec{n}\,(\vec{r}\cdot\vec{n})(1-\cos\Phi) + (\vec{r}\times\vec{n})\sin\Phi \qquad \square$$

G 4.8 INFINITESIMALE ROTATIES

40 (a) Specialiseer de rotatieformule voor een eindige rotatie

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\Phi + \vec{n}\,(\vec{r}\cdot\vec{n})(1-\cos\Phi) + (\vec{r}\times\vec{n})\sin\Phi$$

in het geval van een infinitesimale rotatie over een hoek $d\Phi$. (b) Toon aan dat dit neerkomt op een transformatie van de vorm $[X'] = ([1]+[\varepsilon])[X]$, met $[1]$ de eenheidsmatrix en $[\varepsilon]$ een antisymmetrische infinitesimale matrix. (c) Toon aan dat dergelijke infinitesimale rotaties commuteren tot op eerste orde.

(a) De formule zal zichzelf vereenvoudigen. Voor een infinitesimale hoek $d\Phi$ volgt uit reeksontwikkeling van cosinus en sinus, maar evengoed uit de goniometrische cirkel, dat $\cos d\Phi \approx 1$ en $\sin d\Phi \approx d\Phi$. Hierdoor krijgen wij:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\vec{r}\times\vec{n})\,d\Phi$$

(b) Zij $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$. Dan is $\vec{r}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{n} = \begin{bmatrix} x_2 n_3 - x_3 n_2 \\ -x_1 n_3 + x_3 n_1 \\ x_1 n_2 - x_2 n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dus hebben wij voor de uitdrukking in (a):

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + d\Phi \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Of compacter: $[X'] = ([1]+[\varepsilon])[X]$ met $[\varepsilon]$ een antisymmetrische infinitesimale matrix

(c) Beschouw twee infinitesimale rotaties, met infinitesimale matrices $[\varepsilon_1]$ en $[\varepsilon_2]$:

$$(1+[\varepsilon_1])(1+[\varepsilon_2]) = [1]+[\varepsilon_1]+[\varepsilon_2]+[\varepsilon_1][\varepsilon_2] \approx [1]+[\varepsilon_1]+[\varepsilon_2]$$

dit in tegenstelling tot eindige rotaties die niet commuteren! □

G4.10 HET CORIOLISEFFECT

41

Gebruik het verband tussen de tijdsafgeleiden van vectorcomponenten in een space-fixed assenkruis en in een body-fixed assenkruis,

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_b + \vec{\omega}\times\vec{G},$$

met $\vec{\omega}$ de ogenblikkelijke rotatievector bij de beschrijving van een bewegend deeltje in een assenkruis vast aan de aarde verbonden. Leid het Corioliseffect af, en verklaar waarom luchtmassa's op het noordelijk halfrond in tegenwijzerzin circuleren rond een kern van lage-druk.

Dit verband toegepast op de positievector van een deeltje levert het verband tussen de snelheden gemeten door space-fixed ($\vec{v}_s$) en body-fixed ($\vec{v}_r$, meeroterend) waarnemers:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}, \qquad (1)$$

hier is $\vec{\omega}$ de constante rotatievector van de aarde t.o.v. het inertiaalstelsel. We passen de formule nogmaals toe, dit keer op de vector $\vec{v}_s$:

$$\left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_s \qquad (2)$$

Het linkerlid is de versnellingsvector $\vec{a}_s$ gemeten door de space-fixed waarnemer. In het rechterlid vervangen we $\vec{v}_s$ door de uitdrukking in (1), zodat

$$\vec{a}_s = \left(\frac{d(\vec{v}_r+\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right) + \vec{\omega}\times(\vec{v}_r \times \vec{\omega}\times\vec{r})$$

De vector $\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r = \vec{a}_r$ is nu de versnelling van het deeltje gemeten door de meeroterende waarnemer. We vinden dus finaal:

$$\vec{a}_s = \vec{a}_r + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

In het inertiaalstelsel (space-fixed assenkruis) geldt de 2e wet van Newton, $\vec{F} = m\vec{a}_s$. Nu geldt er voor een met de aarde meeroterende waarnemer

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{F}_{eff}$$

Dit laatste is de uitdrukking voor de effectieve kracht onder invloed van dewelke het deeltje lijkt te bewegen voor een waarnemer vast verbonden aan de aarde.

- De term $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ is de vertrouwde centrifugaalkracht, maximaal aan de evenaar en nul aan de polen.
- Het is de Coriolisterm $-2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$ die de luchtmassa's in een bepaalde richting doet circuleren. Ze treedt op voor deeltjes die bewegen t.o.v. het meeroterend aardse assenkruis. Een deeltje dat op het noordelijk halfrond op constante hoogte (horizontaal) beweegt wordt naar rechts afgebogen t.o.v. zijn bewegingsrichting. Zo ook voor een luchtmassadeeltje, dat daarnaast ook nog van hogere naar lagere druk migreert en daardoor in tegenwijzerzin rond een kern van lage-druk circuleert.

HOOFDSTUK 5

DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN VAN STARRE LICHAMEN

G5.1 DRAAIMOMENT EN KINETISCHE ENERGIE BIJ DE BEWEGING ROND EEN PUNT

42 Druk het draaimoment van een star lichaam met 1 punt vast in de ruimte (dat als oorsprong wordt genomen) uit in termen van de rotatievector, en voer de componenten van de traagheidstensor in.

Het draaimoment rond dit vaste punt wordt gegeven door

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n, \qquad (1)$$

waarbij gesommeerd wordt over de (discrete) massapunten van het starre lichaam. De $\vec{r}_n$ zijn positievectoren van punten vast in het starre lichaam. Gelet op

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_b + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

is dus de snelheid $\vec{v}_n$ enkel afkomstig van het wentelen van het starre lichaam:

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n \qquad (2)$$

Het draaimoment wordt dan (2) in (1):

$$\vec{L} = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = \sum_n m_n \left((\vec{r}_n)^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n) \vec{r}_n \right); \qquad (3)$$

gelet op $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$. Dan hebben we voor de i^{e} component van (3)

$$L_i = \sum_n m_n \left(r_n^2 \omega_i - x_{ni} \sum_j \omega_j x_{nj} \right) \qquad (4)$$

hier is dus $r_n^2 = x^2 + y^2 + z^2$ en x_1 duidt x, ... duidt y, ... duidt z

Men kan (4) ook herschrijven als:

$$L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j \,. \tag{5}$$

met

$$I_{ij} = \sum_n m_n \left(\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj} \right)$$

(5) kunnen wij bondig schrijven voor de volledige impulsmomentvector:

$$\vec{L} = \overline{\overline{\overline{I}}} \cdot \vec{\omega}, \tag{6}$$

met $\overline{\overline{\overline{I}}}$ de traagheidstensor. Het draaimoment is blijkbaar via een lineaire transformatie verbonden met de rotatievector, met transformatiematrix $I_{ij} = I_{ji}$ (symmetrische matrix). De diagonale elementen noemt men de traagheidsmomenten. Zo is I_{xx} het traagheidsmoment rond de x-as:

$$I_{xx} = \sum_n m_n \left(r_n^2 - x_n^2 \right) = \sum_n m_n \left(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n^2 \right) = \sum_n m_n \left(y_n^2 + z_n^2 \right) \geq 0$$

De niet-diagonaalelementen noemen wij de traagheidsproducten. Hier is $\delta_{ij} = 0$, bijv.:

$$I_{xy} = -\sum_n m_n x_n y_n$$

□

G.3 DE TRAAGHEIDSTENSOR EN HET TRAAGHEIDSMOMENT

43

Druk de kinetische energie van een star lichaam met 1 punt vast in de ruimte uit met behulp van de traagheidstensor en de rotatievector.

We hadden dus 42 (2):

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n,$$

zodat we de kinetische energie als volgt kunnen uitdrukken:

$$T = \sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_n^{\,2} = \sum_n \frac{1}{2} m \vec{v}_n \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_n \right)$$

Nu kan men dit herschikken m.b.v. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$:

$$T = \sum_n \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\overline{\overline{I}}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\,\omega_i\omega_j$$

↑ tot hier

Als $\vec{n}$ de richting van de ogenblikkelijke rotatie-as is, dus $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, dan heeft men nog:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2(\vec{n}\cdot\overline{\overline{I}}\cdot\vec{n}) = \frac{1}{2}\omega^2 I,$$

met I het traagheidsmoment rond de rotatie-as, gegeven door:

$$I = \vec{n}\cdot\overline{\overline{I}}\cdot\vec{n} = \sum_{ij} n_i n_j I_{ij} = \sum_n m_n \sum_{ij} n_i n_j (r_n^2\delta_{ij} - x_{ni}x_{nj}) \qquad \square$$

G5.4 HOOFDASSEN VAN EEN STAR LICHAAM

44

Toon aan dat onder een rotatie van het assenkruis de componenten van de traagheidstensor $I'_{i'j'}$ in het nieuwe assenkruis verbonden zijn met componenten I_{ij} in het oorspronkelijke assenkruis door

$$I'_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i}[O]_{j'j} I_{ij}$$

met $[O]$ de transformatiematrix met elementen

$$[O]_{i'i} = \vec{n}'_{i'}\cdot\vec{n}_i$$

en $\vec{n}_i$ eenheidsvectoren volgens de assen van het oorspronkelijke assenkruis, $\vec{n}'_{i'}$ eenheidsvectoren volgens de assen van het nieuwe assenkruis.

We gaan dus na hoe de traagheidstensor reageert op een verandering van assenkruis $Oxyz$ naar een geroteerd assenkruis $Ox'y'z'$.

In $Oxyz$ is de traagheidstensor:

$$I_{ij} = \sum_n m_n\left\{\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni}x_{nj}\right\}$$

$$= \sum_n m_n\left\{(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)(\vec{r}_n\cdot\vec{r}_n) - (\vec{n}_i\cdot\vec{r}_n)(\vec{n}_j\cdot\vec{r}_n)\right\} \qquad (1)$$

In het geroteerd assenkruis $Ox'y'z'$ is de traagheidstensor, analoog:

$$I_{i'j'} = \sum_n m_n \left\{ (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{n}_{j'})(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}_{j'} \cdot \vec{r}_n) \right\} \qquad (2)$$

Het verband tussen de twee wordt gelegd door de relatie tussen de eenheidsvectoren van het $Oxyz$- en het $Ox'y'z'$-assenkruis:

$$\vec{n}_{i'} = \sum_i (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{n}_i)\vec{n}_i = \sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i \qquad (3)$$

met gebruikelijke $SO(3)$-matrix $[O]$ die de transformatie tussen de twee assenkruisen bewerkstelligt, d.w.z. de componenten van een vector zijn gevonden door $[x'] = [O][x]$. We substitueren (3) in (2):

$$I_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} \sum_n m_n \left\{ (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j)(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - (\vec{n}_i \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}_j \cdot \vec{r}_n) \right\}$$

$$= \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} I_{ij} \qquad \square$$

HOOFDSTUK 6

OSCILLATIES

G 6.1 KLEINE TRILLINGEN ROND EVENWICHT: FORMULERING

45 Leid de normaaltrillingsvergelijking af voor een conservatief systeem met holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen (beschreven door een Lagrangiaan met n veralgemeende coördinaten), voor kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwicht.

We beginnen met het opstellen van de Lagrangiaan, dus voor het zoeken van uitdrukkingen voor de kinetische en potentiële energieën van het

De kinetische energie vindt men als vanouds d.m.v. $\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_k) \equiv \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_n) \right) \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \cdot \left(\sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \underbrace{\left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)}_{\equiv m_{kl}(q_1, \dots, q_n)} = \frac{1}{2} \sum_{kl} m_{kl}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_k \dot{q}_l \qquad (1)$$

De kinetische energie is een veelterm van de tweede graad in de veralgemeende snelheden. De potentiële energie $V(q_1, \dots, q_n)$ hangt enkel van de veralgemeende coördinaten af (conservatief systeem).

Tot hier niets nieuws. We zeggen dat het systeem een evenwichtspunt q_k^0 heeft als alle veralgemeende krachten nul zijn in dit punt:

$$Q_k = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_k} \right)_0 = 0 \qquad (2)$$

We bekijken nu kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwichtspunt $(q_1^0, \dots, q_n^0)$, dit betekent dat er een begrensde beweging rond het evenwichtspunt optreedt, corresponderend met een minimum van de potentiaalfunctie V. Noteer voor elke veralgemeende coördinaat q_k de afwijking van zijn evenwichtswaarde q_k^0 door

$$\eta_k = q_k - q_k^0$$

en beschouw de η_k als onze nieuwe veralgemeende coördinaten.

Nu maken we een kwadratische benadering van de potentiaalfunctie, d.i. ontwikkel $V(q_1, \dots, q_n)$ in een machtreeks rond $(q_1^0, \dots, q_n^0)$ en breek af bij 2e orde termen (dit is geoorloofd mits kleine uitwijkingen):

$$V(q_1, \dots, q_n) = V_0 + \sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \sum_{kl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l} \right)_0 \eta_k \eta_l$$

- De lineaire term valt weg want, gelet op (2):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0 = \frac{\partial V}{\partial q_k}(q_1^0, \dots, q_n^0) = 0$$

- Ook de constante term $V_0 = V(q_1^0, \dots, q_n^0)$, daar de potentiaal slechts bepaald is op een constante na.

We vinden dus voor de potentiële energie:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\eta_k\eta_l, \tag{3}$$

waarbij de 2e orde afgeleiden

$$V_{kl} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 = V_{lk}$$

de elementen vormen van een reëel-symmetrische $n \times n$-matrix $[V]$.

Op analoge wijze kunnen wij de kinetische energie in (1) ontwikkelen naar de functies $m_{kl}(q_1, \dots, q_n)$, waarbij wij opmerken dat $\dot{q}_k = \dot{\eta}_k$:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{kl}\left\{m_{kl}(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_m \left(\frac{\partial m_{kl}}{\partial q_m}(q_1^0, \dots, q_n^0)\right)\eta_m + \dots\right\}\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l$$

Vermits de η_k zeer klein worden ondersteld, volstaat het de 1e (constante) term in $\{\dots\}$ over te houden, om consistent tot op 2e orde in de kleine uitwijkingen te werken:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{kl} T_{kl}\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l, \tag{4}$$

waarbij

$$T_{kl} = m_{kl}(q_1^0, \dots, q_n^0)$$

de elementen vormen van een reëel-symmetrische $n \times n$-matrix $[T]$.

De Lagrangiaan van deze "harmonische benadering" is nu, gelet op (3) en (4):

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{kl}\left(T_{kl}\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l - V_{kl}\eta_k\eta_l\right) \tag{5}$$

We zoeken in wat volgt de Lagrangevergelijkingen:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_{k_0}} = \frac{\partial}{\partial \eta_{k_0}}\left(-\frac{1}{2}\sum_{kl}V_{kl}\eta_k\eta_l\right) = -\frac{1}{2}\sum_{kl}V_{kl}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta_{k_0}}(\eta_k\eta_l)}_{\delta_{k_0k}\eta_l + \delta_{k_0l}\eta_k}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{kl}V_{kl}\delta_{k_0k}\eta_l - \frac{1}{2}\sum_{kl}V_{kl}\delta_{k_0l}\eta_k$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{l}V_{k_0l}\eta_l - \frac{1}{2}\sum_{k}V_{k_0k}\eta_k$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{l}\left(V_{k_0l}\eta_l + V_{k_0l}\eta_l\right) = -\sum_{l}V_{k_0l}\eta_l$$

Dus $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\sum_l V_{kl}\eta_l$. Analoog hebben we dat

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \sum_l T_{kl}\dot{\eta}_l \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) = \sum_l T_{kl}\ddot{\eta}_l$$

En aangezien $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$ vinden wij voor de Lagrangevergelijkingen:

$$\sum_l T_{kl}\ddot{\eta}_l + \sum_l V_{kl}\eta_l = 0 \tag{6}$$

Dit is een stelsel van n 2e-orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, in de n onbekende functies $\eta_k(t)$. De lineariteit en het constant zijn van de coëfficiënten nodigen uit een exponentiële oplossing te beproeven. We proberen dus oplossingen van de vorm

$$\eta_k(t) = Ca_k e^{-i\omega t} \tag{7}$$

in termen van een reële frequentie ω, een schaalfactor C en amplitudes a_k, die (eventueel) complexe getallen zijn. We nemen met voorinzicht een puur imaginaire exponent omdat we een oscillerend gedrag verwachten. Nu is

$$\dot{\eta}_k(t) = (Ca_k)(-i\omega)e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{\eta}_k(t) = (Ca_k)(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} = -Ca_k\omega^2 e^{-i\omega t} \tag{8}$$

(7) en (8) in de Lagrangevergelijkingen (6) leidt onmiddellijk tot een stelsel lineaire vergelijkingen in de amplitudes:

$$\sum_l V_{kl}\, a_l = \omega^2 \sum_l T_{kl}\, a_l \tag{9}$$

Stoppen wij de amplitudes in een $n\times 1$-kolommatrix $[a]$, dan wordt dit:

$$[V][a] = \lambda[T][a] \tag{10}$$

Deze normaaltrillingsvergelijking heeft de vorm van een veralgemeend eigenwaardeprobleem, ter bepaling van de eigenwaarden $\lambda = \omega^2$ en eigenvectoren $[a]$. □

6.2 EIGENWAARDEVERGELIJKING EN NORMAALTRILLINGEN

46

> Onderstel de Hessiaan positief-semidefiniet en de massamatrix positief-definiet. Toon aan dat er altijd n oplossingen zijn (normaaltrillingen), door de normaaltrillingsvergelijking om te vormen tot een gewoon eigenwaardeprobleem voor een symmetrische matrix.

<u>Voorkennis</u>: Hessiaan $[V]$: de potentiaalmatrix in het stationaire punt, dus de 2e-orde partiële afgeleiden in het stationaire punt (d.i. een punt $(q_1^0, \dots, q_n^0)$ in $\mathbb{R}^n$ waarvoor de gradiënt verdwijnt). Massamatrix $[T]$: de kinetische matrix zoals in 45.

Positief-definiet: alle eigenwaarden zijn strikt positief; positief-semidefiniet: alle eigenwaarden

Als reëel-symmetrische matrix kan $[T]$ gediagonaliseerd worden door een orthogonale matrix $[O]$:

$$[T] = [O][\lambda][O]^T,$$

met $[\lambda]$ een zekere diagonaalmatrix met diagonaalelementen λ^ν. Dit laat toe de vierkantswortel $[T]^{\frac{1}{2}}$ te definiëren als

$$[T]^{\frac{1}{2}} = [O][\sqrt{\lambda}][O]^T,$$

dus $[T]^{\frac{1}{2}}$ heeft dezelfde eigenvectoren als $[T]$, maar met eigenwaarden $\sqrt{\lambda^\nu}$.

- Merk op dat $[T]^{\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}} = [T]$:

$$[T]^{\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}} = [O]\underbrace{[\sqrt{\lambda}]\underbrace{[O]^T[O]}_{[1]}[\sqrt{\lambda}]}_{[\lambda]}[O]^T$$

$$= [O][\lambda][O]^T = [T]$$

- Alle eigenwaarden van $[T]^{\frac{1}{2}}$ zijn strikt positief (positief-definiete matrix), zodat ook de inverse matrix $[T]^{-\frac{1}{2}}$ bestaat, die voldoet aan $[T]^{-\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}} = [1]$:

$$[T]^{-\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}} = [O]\underbrace{[1/\sqrt{\lambda}]\underbrace{[O]^T[O]}_{[1]}[\sqrt{\lambda}]}_{[1]}[O]^T = [O][O]^T = [1]$$

Nu kan men het veralgemeend eigenwaardeprobleem (45)(10) eenvoudig omvormen:

$$[V][a] = \lambda[T][a]$$

$$[V][1][a] = \lambda[T]^{\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}}[a]$$

$$[T]^{-\frac{1}{2}}[V][T]^{-\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}}[a] = \lambda\underbrace{[T]^{-\frac{1}{2}}[T]^{\frac{1}{2}}}_{[1]}[T]^{\frac{1}{2}}[a]$$) links vermenigvuldigen met $[T]^{-\frac{1}{2}}$

Zij nu $[V'] = [T]^{-\frac{1}{2}}[V][T]^{-\frac{1}{2}}$ en $[a'] = [T]^{\frac{1}{2}}[a]$, dan hebben we

$$[V'][a'] = \lambda[a'],$$

dan hebben we een **gewoon** eigenwaardeprobleem bekomen, voor de $n \times n$-reëel-symmetrische matrix $[V']$. We zijn dus verzekerd van n reële eigenwaarden λ_ν, en van het bestaan van evenveel corresponderende eigenvectoren $[e^{\nu}]$. □

HOOFDSTUK 8

DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN VAN HAMILTON

G8.1 BEWEGINGSVERGELIJKINGEN VAN HAMILTON

(47) Leid de canonische vergelijkingen van Hamilton af voor een systeem met Lagrangiaan $L(q_\ell, \dot{q}_\ell, t)$.

De Lagrangeformulering maakt gebruik van de Lagrangiaan $L \equiv L(q_\ell, \dot{q}_\ell, t)$ als scalaire functie die afhangt van n veralgemeende coördinaten $q_\ell(t)$, n veralgemeende snelheden $\dot{q}_\ell(t)$ en eventueel nog van een expliciete tijdsafhankelijkheid. De Lagrangevergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\ell}$$

leveren n 2e-orde differentiaalvergelijkingen met als onbekende functies de $q_\ell(t)$. Nu willen wij overgaan naar een formulering a.h.v. $2n$ 1e-orde differentiaalvergelijkingen met als onbekende functies de n veralgemeende coördinaten $q_\ell(t)$ en de n toegevoegde momenten $p_\ell(t)$, die wij eerder definieerden **als**:

$$p_k(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{1}$$

Wij voeren hiervoor een nieuwe scalaire functie in de Hamiltoniaan $H \equiv H(q_k, p_k, t)$:

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{2}$$

Wij zullen de $\dot{q}_k$-afhankelijkheid in het RL van (2) elimineren ten faveure van de momenten p_k, gebruikmakend van (1).
Men kan de totale differentiaal dH op twee manieren uitdrukken, nl. door differentiatie van respectievelijk het LL en het RL van (2):

$$\sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + \underbrace{p_k d\dot{q}_k}_{A} - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k}_{B} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3}$$

Uit (1) volgt dat $A = B$, zodat deze twee termen voor elkaar wegvallen.
Identificatie levert:

- $$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \tag{4}$$
- $$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \overset{(1)}{=} -\frac{d}{dt} p_k = -\dot{p}_k \tag{5}$$

(4) en (5) leveren de canonische vergelijkingen van Hamilton:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q_k, p_k, t), \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q_k, p_k, t)$$

Zoals beloofd hebben we in totaal dan $2n$ 1e-orde differentiaalvergelijkingen in de $2n$ onbekende functies $q_k(t)$ en $p_k(t)$. $\square$

48

Geef een explicite constructie van de Hamiltoniaan in matrixnotatie, voor het generieke geval van een systeem met conservatieve krachten en een kinetische energie die een homogene kwadratische vorm is in de veralgemeende snelheden.

Een stappenplan voor het opstellen van de Hamiltoniaan...

$$T = \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[m(q)][\dot{q}] \qquad (1)$$

$$[p] = [m(q)][\dot{q}] \qquad (2)$$

Nu wordt de Hamiltoniaan gegeven door:

$$[H] = [p]^T[\dot{q}] - \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[m(q)][\dot{q}] + V(q) \qquad (3)$$

We willen af van de $\dot{q}$-afhankelijkheid ten voordele van p. Uit (2) volgt:

$$[\dot{q}] = [m(q)]^{-1}[p] \quad \Rightarrow [\dot{q}]^T = [p]^T[m(q)]^{-1} \qquad (4)$$

Substitutie van (4) in (3) geeft voor de Hamiltoniaan

$$H = [p]^T[m(q)]^{-1}[p] - \frac{1}{2}[p]^T\underbrace{[m(q)]^{-1}[m(q)]}_{[1]}[m(q)]^{-1}[p] + V(q)$$

$$= \frac{1}{2}[p]^T[m(q)]^{-1}[p] - V(q_1, \dots, q_n) \qquad \square$$