THEORIEVRAGEN

Inleiding tot de Theoretische Fysica

Gemaakt door

Robin Vande Vyver

UGent
Faculteit Wetenschappen

.

gebaseerd op nota's van Emile Segers

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Overzicht van de elementaire begrippen

1.1 Mechanica van 1 deeltje

1.1.1

Toon aan dat de arbeid verricht door de kracht op een deeltje tussen twee punten van zijn baan gelijk is aan het verschil in kinetische energie tussen deze twee punten. Definieer een conservatieve kracht, en leid de functionele vorm af waaraan een conservatieve kracht moet voldoen. Definieer de totale energie bij een conservatief systeem, en toon aan dat deze behouden is.

Onder invloed van de kracht $\vec{F}$ op een deeltje, beweegt dit deeltje op een ruimtelijke baan $\vec{r}(t)$ tussen een tijdstip t_1 en t_2. We definiëren de arbeid verricht door de kracht $\vec{F}$ op het deeltje gedurende dit pad door de lijnintegraal:

$$W_{1\to 2} = \int_{1\to 2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

met $d\vec{s}$ een infinitisimaal lijnelement rakend aan de baan. Afstand is snelheid maal tijd dus krijgen we:

$$d\vec{s} = \vec{v}\ dt = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt$$

Dit werken we nu verder uit:

$$W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(m \cdot \ddot{\vec{r}}\,\right) \cdot \dot{\vec{r}}\ dt$$

We gebruiken nu de kettingregel omgekeerd, we weten immers dat:

$$\frac{d}{dt}(f^2) = 2f \cdot \frac{d}{dt}(f)$$

Dit passen we nu toe:

$$W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2}\right) dt = T(t_2) - T(t_1)$$

met de scalaire functie T gedefinieerd als kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2}$$

Een conservatieve kracht verricht voor gelijk welk mogelijk pad tussen $(t_1, \vec{r}_1)$ en $(t_2, \vec{r}_2)$ eenzelfde hoeveelheid arbeid. Dit is analoog met zeggen dat bij een conservatieve kracht de kringintegraal langs een pad dat op zichzelf sluit, nul is.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Dit is enkel mogelijk wanneer de geleverde arbeid enkel afhangt van de begin- en eindposities, m.a.w. we hebben een of andere functie $f(\vec{r}(t))$ waarvoor geldt:

$$W_{1\to 2} = \int_{1\to 2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$$

Dus $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ moet een tijdsafgeleide zijn van een bepaalde $f(\vec{r}(t))$, er moet dus voor elk pad $\vec{r}(t)$ gelden:

$$\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t))$$

Nu hebben we voor een scalaire functie f:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)) \frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \frac{dz}{dt}(t) = (\vec{\nabla} f) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Hieruit volgt:

$$\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (\vec{\nabla} f) \cdot \dot{\vec{r}}$$
$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

De kracht $\vec{F}$ hangt dus enkel van de positie af, en is een gradiëntveld. De scalaire functie V wordt de potentiële energie genoemd.

Voor de arbeid vinden we nu:

$$W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} -\vec{\nabla} V(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) \right) dt = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V_1 - V_2$$

We hebben nu twee uitdrukkingen voor arbeid, deze kunnen we combineren:

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

met E = T + V de totale energie, en deze is behouden.

Arbeid - energie:

$$W_{1\to 2} = \Delta T = -\Delta V$$

Totale energie: (behouden grootheid bij conservatieve krachten)

$$E = T + V$$

Conservatieve krachten:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

1.1.2

Wat als de kracht een gradiëntveld is, maar ook een expliciete tijdsafhankelijke vertoont?

We kunnen dit compact noteren als volgt:

$$\vec{F}(\vec{r}(t),t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}(t),t)$$

Nu geeft de kettingregel:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) = \frac{\partial V}{\partial x}(\vec{r}(t),t)\frac{dx}{dt}(t) \ + \ \frac{\partial V}{\partial y}(\vec{r}(t),t)\frac{dy}{dt}(t) \ + \ \frac{\partial V}{\partial z}(\vec{r}(t),t)\frac{dz}{dt}(t) \ + \ \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t)$$

Of nog:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) = \vec{\nabla}V(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t)$$

Dit herschrijven we tot:

$$-\vec{\nabla}V(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t)$$

Nu hebben we voor de infinitesimale arbeid:

$$\vec{F}(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = -\vec{\nabla}V(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = \left(-\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t),t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t),t)\right) dt$$

Hieruit kunnen we besluiten dat de energie T + V wel nog steeds kan gedefinieerd kan worden maar dat ze niet behouden blijft vanwege de $\partial V/\partial t$-term.

1.2 Mechanica van meerdere deeltjes

1.2.1

Definiëer het zwaartepunt van een systeem van meerdere deeltjes. Toon aan dat het zwaartepunt beweegt als een deeltje met de totale massa van het systeem onder invloed van de totale externe kracht, mits de interne krachten voldoen aan de (zwakke vorm) van de derde wet van Newton. Definiëer de totale impuls van het systeem en toon aan dat deze behouden blijft als de externe kracht op het systeem verdwijnt.

Het zwaartepunt van een systeem van meerdere deeltjes wordt als volgt gedefinieerd:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Op een deeltje i van de massaverdeling werken twee krachten:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

Wegens de Derde wet van Newton valt de laatste term weg wanneer gesommeerd wordt over alles deeltjes want:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

We houden dan voor de totale kracht $\vec{F}$ (schijnbaar in het zwaartepunt) over:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

Hieruit volgt dus:

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}$$

De totale impuls:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M \dot{\vec{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}}$$

Dus kunnen we schrijven:

$$\vec{F}^{(e)} = \dot{\vec{P}}$$

Als de totale externe kracht gelijk aan nul is, dan is ook de afgeleide van de impuls gelijk aan nul en dus is de totale impuls dan een behouden grootheid.

1.2.2

Definiëer het totaal draaimoment en extern krachtmoment (rond de oorsprong van een Cartesisch coördinaatsysteem). Toon aan dat in geval van centrale interne krachten (sterke vorm van de 3de wet van Newton) de tijdsevolutie van het totaal draaimoment bepaald wordt door het extern krachtmoment, en dat het totaal een behouden grootheid is als het extern krachtmoment op het systeem verdwijnt.

We definiëren eerst het totaal draaimoment L en het totaal extern krachtmoment N:

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \qquad\qquad \vec{N}^{(e)} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)})$$

Om de tijdsevolutie van het totaal draaimoment te bepalen, nemen we de afgeleide naar de tijd:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i \; + \; \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

De eerste term valt weg omdat $\vec{p}_i = m\dot{\vec{r}}_i$:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Sterke vorm van de wet van actie en reactie (dus centrale interne krachten):

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad en \qquad \vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Hierdoor is $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)}$, zodat:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{N}^{(e)}$$

Stel dat er geen extern krachtmoment is:

$$\vec{N}^{(e)} = 0 = \dot{\vec{L}} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{L} \; is \; constant$$

Het draaimoment is dus een behouden grootheid.

1.2.3

Toon aan dat het totaal draaimoment (rond de oorsprong) de som is van het draaimoment van het zwaartepunt plus het draaimoment van de beweging van de deeltjes ten opzichte van het zwaartepunt.

We introduceren plaatsvectoren $\vec{r'}_i$ relatief ten opzichte van het zwaartepunt $\vec{R}$:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r'}_i \qquad zodat \; \sum_i m_i \vec{r'}_i = 0$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_i \qquad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p'}_i$$

We bewijzen eerst nog dat $\sum_i m_i \vec{r'}_i = 0$:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r'}_i = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r'}_i$$

Nu weten we dat:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \Leftrightarrow \qquad M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Dan krijgen we:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i + \sum_i m_i \vec{r'}_i$$

Hieruit volgt dan dat:

$$\sum_i m_i \vec{r'}_i = 0$$

Nu berekenen we het totaal draaimoment:

$$\vec{L} \;=\; \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \;=\; \sum_i (\vec{R} + \vec{r'}_i) \times \vec{p}_i \;=\; \vec{R} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r'}_i \times \vec{p}_i \;=\; \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r'}_i \times \vec{p}_i$$

We weten dat $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p'}_i$, dit substitueren we in de vorige vergelijking:

$$\vec{L} \;=\; \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r'}_i \times (m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p'}_i) \;=\; \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r'}_i \right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r'}_i \times \vec{p'}_i$$

We hebben reeds bewezen dat $\sum_i m_i \vec{r'}_i = 0$ dus krijgen we:

$$\vec{L} \;=\; \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r'}_i \times \vec{p'}_i$$

1.2.4

Toon aan dat de arbeid verricht door de krachten op de deeltjes tussen twee punten van het configuratiepad gelijk is aan het verschil in totale kinetische energie tussen deze twee punten.

De arbeid verricht door de krachten om het systeem van een configuratie $(t_1, \vec{r}_i(t_1))$ naar een configuratie $(t_2, \vec{r}_i(t_2))$ te brengen is gelijk aan:

$$W_{1\to 2} = \sum_i \int_{1\to 2} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i$$

Nu passen we de Tweede wet van Newton toe: $\vec{F} = \dot{\vec{p}_i} = m_i \ddot{\vec{r}_i}$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (m_i \ddot{\vec{r}_i}) \cdot \dot{\vec{r}_i}\, dt$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right) dt = T(t_2) - T(t_1)$$

met de scalaire functie T, de totale kinetische energie van het systeem:

$$T = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right)$$

1.2.5

Toon aan dat de totale kinetische energie gelijk is aan de som van de kinetische energie van het zwaartepunt plus de kinetische energie van de beweging van de deeltjes rond het zwaartepunt.

We moeten dus bewijzen dat:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}_i'}^{\,2}\right)$$

We splitsen de vector $\vec{r}$ op in twee termen:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$$

Dan krijgen we:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r'}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{r}_i'}^{\,2} + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}_i'}\right)$$

Aangezien $\sum_i m_i \dot{\vec{r}_i'} = 0$ krijgen we:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}_i'}^{\,2}\right)$$

1.2.6

Definieer conservatieve interne en externe krachten (de interne krachten voldoen aan de zwakke vorm van de 3de wet van Newton). Toon aan dat in dit geval de totale energie een behouden grootheid is.

Conservatieve externe kracht:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i$$

De externe kracht op deeltje i is enkel een functie van de positie van i, dus $\vec{F}_i^{(e)}(\vec{r}_i)$. De notatie $\vec{\nabla}_i$ betekent $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i})$, met andere woorden de partiële afgeleiden naar de coördinaten van deeltje i. Er is een scalaire onderliggende potentiaal $V_i = V_i(\vec{r}_i)$ die enkel van de positie van het deeltje i afhangt, zo dat:

$$\vec{F}_i^{(e)}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i)$$

Conservatieve interne kracht:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ji}$$

De kracht van deeltje j op deeltje i is een vectorfunctie van de posities van i en j, dus $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$. Translatie-invariantie impliceert dat de vectorfunctie enkel van het verschil $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ kan afhangen. De onderliggende scalaire potentiaal kan dan ook enkel van het verschil $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ afhangen: $V_{ji} \equiv V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ en

$$\vec{F}_{ji}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

De (zwakke vorm van) de derde wet van Newton, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, eist dat de potentiaalfunctie symmetrisch is, dus $V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$. Dan geldt automatisch dat:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &= -\vec{\nabla}_j V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ -\vec{F}_{ji} &= +\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dan:

$$-\vec{\nabla}_j V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad of \qquad -\vec{\nabla}_j V_{ji} = \vec{\nabla}_i V_{ji}$$

Centrale interne krachten (sterke wet van actie en reactie), met andere woorden $\vec{F}_{ji} // (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, vereisen bovendien dat de potentiaal enkel een functie is van de afstand, dus:

$$V_{ij} = V_{ji} = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Dan geeft $\vec{\nabla}_i V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ aanleiding tot een centrale kracht.

In geval van conservatieve externe en interne krachten geldt dus dat:

$$W_{1\to 2} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (-\vec{\nabla}_i V_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i \, dt + \sum_{ij} \int_{t_1}^{t_2} (-\vec{\nabla}_i V_{ji}) \cdot \dot{\vec{r}}_i \, dt$$

waarbij:

$$\begin{aligned} \sum_i (\vec{\nabla}_i V_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_i V_i(\vec{r}_i)\Big) \\ \sum_{ij} (\vec{\nabla}_i V_{ji}) \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\sum_{ij} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\Big) \end{aligned}$$

Nu is de potentiële energie:

$$V_{tot} = \sum_i V_i(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

De som van de potentiële en de kinetische energie is dus weer behouden.

1.3 Bindingen

1.3.1

Toon aan dat in geval van holonome bindingen men altijd onafhankelijke veralgemeende coördinaten kan invoeren.

Stel we hebben N deeltjes, dus 3N vrijheidsgraden. Dankzij de bindingen kunnen we het aantal vrijheidsgraden echter verminderen. Beschouw n_b holonome bindingen:

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \\ \quad\quad ... \\ f_{n_b}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \end{cases}$$

Met dit stelsel elimineren we n_b onbekenden, we houden $n_q = 3N - n_b$ onafhankelijke variabelen (of n_q vrijheidsgraden) over.

Wat zijn bv. de meest geschikte veralgemeende coördinaten voor een deeltje dat beweegt op een boloppervlak waarvan de straal expliciet van de tijd afhangt?

Twee veralgemeende coördinaten: (θ, ϕ) die we gebruiken als bolcoördinaten (met $r = R(t)$ de straal van de bol, op ieder moment gekend):

$$x = R(t)\sin\theta\cos\phi \quad , \quad y = R(t)\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = R(t)\cos\theta$$

1.4 Principe van d'Alembert en Lagrangevergelijkingen

1.4.1

Neem aan dat voor een systeem met holonome tijdsonafhankelijke bindingen het principe van d'Alembert geldt, m.a.w. de arbeid verricht door de reactiekrachten verdwijnt. Ga over naar onafhankelijke veralgemeende coördinaten en leid hieruit de 1ste vorm van de Lagrangevergelijkingen af.

We bewijzen dus dat:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

gebruikmakend van het principe van d'Alembert op de reactiekrachten $\vec{F}_i^{(r)}$:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(r)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

Noem $\vec{F}^{(a)}$ de toegepaste kracht, dan geeft de tweede wet van Newton:

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)} - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

Dit sommeren we nu:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(r)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

Nu passen we het principe van d'Alembert toe waardoor de tweede term wegvalt en krijgen we:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

We laten het superscript (a) weg en bekomen dan:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

voor alle toegelaten bewegingen $\dot{\vec{r}}_i$. Door de bindingen zijn de $\vec{r}_i$ en dus ook de $\dot{\vec{r}}_i$ niet onafhankelijk.

Beschouw n_b holonome tijdsonafhankelijke bindingen $f_n(\vec{r}_i) = 0$, dan moeten we eerst overgaan naar $n_q = 3N - n_b$ veralgemeende coördinaten zodanig dat alle $\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_k)$ automatisch voldoen aan $f_n(\vec{r}_i) = 0$. De q_k op hun beurt kunnen een tijdsafhankelijkheid krijgen, dan beschrijven de cartesische coördinaten een pad $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q_k(t))$. Nu volgt hieruit het verband tussen de cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \qquad (kettingregel)$$

We hebben nu twee vergelijkingen die we kunnen samenvoegen en daarbij krijgen we:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = 0$$

waarbij we een veralgemeende kracht Q_k definiëren als:

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

We werken de vergelijking nog verder uit door een uitdrukking te zoeken voor $\dot{\vec{p}}_i$. Laten we de massa even achterwege dan wordt de $\dot{\vec{p}}_i$-term:

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

Uit $\dot{\vec{r}}_i = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$ volgt, door af te leiden naar $\dot{q}_k$:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad of \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

Hieruit volgt:

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)$$

...

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

1.4.2

Specialiseer naar een systeem met conservatieve (toegepaste) krachten en leid de 2de vorm van de Lagrangevergelijkingen af.

Voor een systeem met conservatieve krachten is $\vec{F_i} = -\vec{\nabla}_i V$ met de potentiaal $V \equiv V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)$ enkel de functie van de positie van de deeltjes. Via de transformatie naar veralgemeende coördinaten volgt dat de potentiaal enkel van de veralgemeende coördinaten afhangt:

$$V \equiv V(\vec{r}_1(q_{k_1}), ..., \vec{r}_N(q_{k_n})$$

De afgeleide van de potentiaal naar een veralgemeende coördinaat volgt uit de kettingregel:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_i (\vec{\nabla}_i V) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Waarmee we bedoelen:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \vec{e}_{y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \vec{e}_{z_1} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_k} + ...$$

Zodat we uit de definitie voor veralgemeende kracht onmiddelijk halen:

$$Q_k = \sum_i \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_i (\vec{\nabla}_i V) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

De potentiaal hangt enkel van de veralgemeende coördinaten af, dus niet van de snelheden:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Nu vult men al dit in in de 1ste vorm van de Lagrangevergelijkingen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

met de Lagrangiaan L:

$$L = T - V$$

Hoofdstuk 2

Variationele principes en de Lagrangevergelijkingen

2.1 Variatie analyse

2.1.1

Leid de Euler-Lagrange vergelijking af voor het volgende probleem: voor welke functie y(x) die door de twee gegeven punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, is de volgende integraal extremaal? Hier is f een gladde functie met 3 argumenten.

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x), x)\ dx$$

De vraag is dus: voor welk pad y(x) wordt de integraal J stationair, dus een kleine vervorming van het pad verandert de waarde van de integraal niet (tot op 1ste orde voor de kleine vervorming). De integraal is dan extremaal (maximaal of minimaal), wat we mathematisch als volgt uitdrukken.

Stel dat y(x) het pad is waarvoor J stationair wordt. Bekijk dan een familie van paden $y(x, \alpha)$, geparametriseerd aan de hand van een parameter α:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

met $\eta(x)$ een arbitraire functie, behalve dat $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, zodat elk pad $y(x, \alpha)$ de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) verbindt.

Voor kleine waarden van α ligt $y(x, \alpha)$ in de buurt van $y(x)$, het valt ermee samen als $\alpha = 0$.

De integraal J kan geëvalueerd worden voor alle paden $y(x, \alpha)$ en wordt zo een functie van α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x)\ dx$$

De integraal moet stationair zijn voor $y(x)$, dus als $\alpha = 0$. Hij bereikt dan zijn extreme waarde, dus:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$$

We werken dit nu verder uit:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x)\ dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha}\ dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx$$

Wegens onze definitie van $y(x,\alpha)$, $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, krijgen we:

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}y(x,\alpha) = \eta(x)$$
$$\frac{d\dot{y}}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}y(\dot{x},\alpha) = \dot{\eta}(x)$$

Verder evalueren we voor $\alpha = 0$, zodat $y(x,\alpha) = y(x)$ en $\dot{y}(x,\alpha) = \dot{y}(x)$.

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(x),\dot{y}(x),x) \right)\eta(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x),\dot{y}(x),x) \right)\dot{\eta}(x) \right] dx$$

We stellen nu $h(x)$:

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x),\dot{y}(x),x)$$

De tweede term van de integraal kunnen we nu partieel integreren:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} h(x)\dot{\eta}(x)\, dx &= \Big[h(x)\eta(x) \Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\dot{h}(x)\, dx \\ &= h(x_2)\eta(x_2) - h(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\dot{h}(x)\, dx \end{aligned}$$

Omdat $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ vallen de eerste twee termen weg. We kunnen dit resultaat nu substitueren in onze vorige vergelijking:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(x),\dot{y}(x),x) \right)\eta(x) - \eta(x)\dot{h}(x) \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(x),\dot{y}(x),x) \right) - \frac{d}{dx}h(x) \right] \eta(x)\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(x),\dot{y}(x),x) \right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x),\dot{y}(x),x) \right) \right] \eta(x)\, dx \end{aligned}$$

De voorwaarde voor stationariteit was dat de integraal nul is, en dit moet gelden voor een arbitraire functie $\eta(x)$ (die voldoet aan $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$). Dit kan enkel als de factor tussen [] in het integrandum verdwijnt over het integratie-interval.

We zien dus dat het pad $y(x)$ de integraal stationair maakt, als $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y(x),\dot{y}(x),x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x),\dot{y}(y),x) \right)$$

Deze differentiaalvergelijking wordt de Euler-Lagrange vergelijking genoemd:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)$$

2.2 Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

2.2.1

Veralgemeen dit tot het probleem: voor welke functies $(y_1(x), ..., y_n(x))$ die door twee gegeven configuraties $(y_1(x_1), ..., y_n(x_1))$ en $(y_1(x_2), ..., y_n(x_2))$ gaan is de integraal J extremaal. Leid de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen af.

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), ..., y_n(x), \dot{y}_1(x), ..., \dot{y}_n(x), x)\ dx$$

Deze uitbreiding is analoog aan het vorige. In plaats van een functie $y(x)$ hebben we nu een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : (y_1(x), ..., y_n(x))$ dat een beginconfiguratie $x = x_1$ met een eindconfiguratie $x = x_2$ verbindt. We vragen ons opnieuw af voor welke waarden het pad $(y_1(x), ..., y_n(x))$ een stationaire waarde oplevert voor de integraal J.

We voeren opnieuw een familie van paden in rond $(y_1(x), ..., y_n(x))$ aan de hand van:

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha\eta_i(x) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

De η_i zijn arbitraire functies, behalve dat $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$ voor alle i. Evaluatie van het pad $(y_1(x, \alpha), ..., y_n(x, \alpha))$ levert een functie in α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\big(y_1(x, \alpha), ..., y_n(x, \alpha), \dot{y}_1(x, \alpha), ..., \dot{y}_n(x, \alpha)\big)\ dx$$

Stationariteit van J voor het pad $(y_1(x), ..., y_n(x))$ betekent dat:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \ = \ \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\eta_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\dot{\eta}_i \right) dx \ = \ 0$$

Uit onze definitie van $y_i(x, \alpha)$ weten we immers dat:

$$\frac{d}{d\alpha} y_i(x, \alpha) = \eta_i$$
$$\frac{d}{d\alpha} \dot{y}_i(x, \alpha) = \dot{\eta}_i$$

De termen in het integrandum met $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\dot{\eta}_i$ worden terug omgezet met partiële integratie zoals in vorige afleiding:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\dot{\eta}_i\ dx = \int_{x_1}^{x_2} h_i(x)\frac{d\eta_i}{dx}(x)\ dx = h_i(x_2)\eta_i(x_2) - h_i(x_1)\eta_i(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \eta_i \frac{dh_i}{dx}\ dx$$

Dus krijgen we:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \eta_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx$$

Dit moet gelden voor alle arbitraire functies $\eta_i(x)$, zodat de factor die elke η_i vermenigvuldigt nul moet zijn. De corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen zijn dan:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}$$

2.2.2

Definieer de actie-integraal, dit is de tijdsintegraal van de Lagrangiaan tussen twee tijdstippen, en toon aan dat de eis dat de actie-integraal extremaal is, resulteert in de Lagrangevergelijkingen.

We definiëren eerst de actie-integraal:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)\ dt$$

Eisen dat I stationair is voor het fysisch gerealiseerde pad $\{q_k(t)\}$ in de configuratieruimte, is equivalent met de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen voor dit variationeel probleem:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

Dit zijn precies de Lagrange bewegingsvergelijkingen.

2.3 Voordelen van een variationele formulering

2.3.1

Toon aan dat de Lagrangiaan niet-uniek is, met andere woorden dat de Lagrange vergelijkingen invariant zijn als een totale tijdsafgeleide van een functie van de coördinaten en de tijd bij de Langrangiaan wordt opgeteld.

via variationele formulering:

Stel dat een systeem beschreven wordt door een Lagrangiaan L. Definieer dan een nieuwe Lagrangiaan L' als:

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}(h(q_k, t))$$

Dan wordt de actie-integraal I' van L':

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) + \frac{d}{dt}(h(q_k(t), t)) \right)\ dt$$

Deze integraal werken we nu uit:

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)\ dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(h(q_k(t), t))\ dt$$

$$I' = I + \Big(h(q_k(t_2), t_2) - h(q_k(t_1), t_1) \Big)$$

$h(q_k(t_2), t_2)$ en $h(q_k(t_1), t_1)$ hebben dezelfde waarde voor alle paden die de beginconfiguratie $q_k(t_1)$ met de eindconfiguratie $q_k(t_2)$ verbinden. Het speelt dus geen rol in het variationeel probleem, en het stationair zijn van I en I' geeft dezelfde oplossing voor het fysisch gerealiseerde pad.

via Lagrange vergelijkingen:

Dit moet ook rechtstreeks volgen uit de Lagrange vergelijkingen, anders is er een inconsistentie, maar dit is veel lastiger.

We definiëren opnieuw een tweede Lagrangiaan:

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}(h(q_k, t))$$

De additionele totale tijdsafgeleide wordt dan:

$$\frac{d}{dt}(h(q_k, t)) = \sum_l \frac{\partial h}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial h}{\partial t}$$

We gebruiken nu de Lagrange vergelijking:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

We leiden eerst de verschillende onderdelen van de vergelijking af:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}$$

We voegen deze nu samen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l - \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t} = 0$$

De termen in h vallen weg en dan krijgen we de Lagrange vergelijking voor L.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Hieruit volgt dus dat de Lagrangiaan slechts bepaald is op een totale tijdsafgeleide van een functie van coördinaten en de tijd na.

2.4 Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

2.4.1

Voer algemeen het canonisch toegevoegd moment p_k van een veralgemeende variabele q_k in. Toon aan dat dit een behouden grootheid is als de Lagrangiaan niet van de variabele q_k afhangt (met andere woorden q_k is een cyclische coördinaat).

We definiëren het canonisch toegevoegd moment van een veralgemeend coördinaat q_k als volgt:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Als een bepaalde q_k niet voorkomt in de Lagrangiaan (eventueel komt $\dot{q}_k$ wel voor) dan noemt men q_k een cyclische coördinaat. Er geldt dan dat:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Uit de Lagrange vergelijking volgt dan voor $\dot{p}_k$:

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt}p_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Hieruit volgt dat het toegevoegd moment van een cyclische coördinaat altijd een behouden grootheid is.

2.4.2

Onderstel een conservatief systeem, en stel dat een veralgemeende coördinaat correspondeert met een translatie van het systeem in een bepaalde richting. Toon aan dat als de potentiaal invariant is onder een verandering van deze coördinaat, de projectie van de totale impuls volgens deze richting een behouden grootheid is.

Stel dat als een bepaalde coördinaat q_1 verandert met een infinitesimaal bedrag dq_1, het hele systeem een translatie ondergaat over dq_1 in een vaste richting langs de eenheidsvector $\vec{n}$. De Cartesische coördinaten van de deeltjes, uitgedrukt met veralgemeende coördinaten, voldoen dus aan:

$$\vec{r_i}(q_1 + dq_1, q_2, ...) = \vec{r_i}(q_1, q_2, ...) + (dq_1)\vec{n}$$

zodat een constante vector wordt bekomen voor:

$$\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1} = \vec{n}$$

Dit komt overeen met een verschuiving in de richting $\vec{n}$ van de oorsprong van het Cartesisch assenstelsel. De kinetische energie kan niet afhangen van de keuze van de oorsprong, zodat:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

Dit volgt ook uit de formules:

...

We vinden dan voor de Lagrangiaan:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

Maar we beschouwen een conservatief systeem, dus $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$, dan krijgen we:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}p_1 = \dot{p}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{p}_1 = Q_1$$

We werken deze gelijkheid nu verder uit. Voor de algemene kracht Q_1 geldt:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1} = \left(\sum_i \vec{F_i}\right) \cdot \vec{n} = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Dit is niets anders dan de component van de totale kracht $\vec{F}$ in de richting van $\vec{n}$. Voor het moment toegevoegd aan q_1 gebruiken we de definitie van p_1, ermee rekening houdend dat we met conservatieve krachten werken (die enkel van de coördinaten afhangen), dus $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$.

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2}m_i \dot{\vec{r_i}}^{\,2}\right) = \sum_i \left(m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r_i}}}{\partial \dot{q}_1}\right)$$

We vonden al dat:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r_i}}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}$$

dus krijgen we:

$$p_1 = \sum_i \left(m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}\right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

p_1 is dus gegeven door de component van de totale impuls $\vec{P}$ in de richting van $\vec{n}$. We vonden dat $Q_1 = \dot{p}_1$ en dus verkrijgen we volgende vergelijking:

$$\dot{\vec{P}} \cdot \vec{n} = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Nu beschouwen we het geval dat q_1 een cyclische coördinaat is. In dit geval is:

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0$$

want V hangt niet af van q_1. Dus geldt er dat $\dot{p}_1 = 0$, met andere woorden p_1 is een behouden grootheid, zodat ook $\vec{P} \cdot \vec{n}$ constant is in de tijd.

2.4.3

Onderstel een conservatief systeem, en stel dat een veralgemeende coördinaat correspondeert met een rotatie van het systeem rond een bepaalde as. Toon aan dat als de potentiaal invariant is onder een verandering van deze coördinaat, de projectie van het totale draaimoment volgens deze richting een behouden grootheid is.

Stel dat als een bepaalde coördinaat q_1 verandert met een infinitesimaal bedrag dq_1, het hele systeem een rotatie ondergaat over een hoek dq_1 rond een as met vaste richting $\vec{n}$. De Cartesische coördinatenvan de deeltjes, uitgedrukt met veralgemeende coördinaten, voldoen dus aan:

$$\vec{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, ...) = \vec{r}_i(q_1, q_2, ...) + (dq_1)\vec{n} \times \vec{r}_i(q_1, q_2, ...)$$

zodat:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \vec{n} \times \vec{r}_i$$

Dit komt overeen met een rotatie van het $Oxyz$ Cartesisch assenkruis rond een as met richting $\vec{n}$ door de oorsprong O. De kinetische energie kan niet afhangen van de keuze van de oriëntatie van het assenstelsel zodat:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

Dit geeft voor de Lagrangiaan, wetende dat we werken in een conservatief systeem:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1$$

Hiermee kunnen we de Lagrangevergelijking opstellen voor q_1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt}(p_1) &= Q_1 \\ \dot{p}_1 &= Q_1 \end{aligned}$$

We zoeken nu naar uitdrukkingen voor $\dot{p}_1$ en Q_1:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{n} \cdot \vec{N}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \\ &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \vec{n} \cdot \vec{L} \end{aligned}$$

$$\dot{p}_1 = \vec{n} \cdot \dot{\vec{L}}$$

Als we deze twee samenvoegen, krijgen we:

$$\dot{\vec{L}} \cdot \vec{n} = \vec{N} \cdot \vec{n}$$

Als V niet afhangt van q_1, dan is q_1 een cyclische coördinaat. In dat geval is p_1 een behouden grootheid, met andere woorden: $\vec{L} \cdot \vec{n}$ is constant in de tijd.

2.5 Behoud van energie

2.5.1

Toon aan dat in geval van holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen en conservatieve gegeven krachten, de Hamiltoniaan van het systeem een behouden grootheid is.

Gezien het gegeven hangt de uitdrukking van de Cartesische coördinaten niet expliciet van de tijd af:

$$\vec{r}_i \equiv \vec{r}_1(q_1, q_2, ..., q_{n_q})$$

Dit geeft dus voor het resulterend verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Hieruit volgt voor de kinetische energie:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 = \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)$$

Dit is een homogene veelterm van de tweede graad in de veralgemeende snelheden. Ook de potentiaal is niet expliciet van de tijd afhankelijk omdat we werken met conservatieve krachten. Met deze aannames is ook de Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k)$ niet expliciet tijdsafhankelijk. We hebben voor haar totale tijdsafgeleide:

$$\frac{d}{dt} L(q_k(t), \dot{q}_k(t)) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

We substitueren de Lagrangevergelijking

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

in onze vergelijking en dan krijgen we:

$$\frac{d}{dt} L(q_k(t), \dot{q}_k(t)) = \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

Het rechterlid is nu niets anders dan de totale tijdsafgeleide van een functie $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \sum_k \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}_k \right) \right]$$

Met dit nieuw gegeven, krijgen we:

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k) = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

Of anders geschreven:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)\right) = 0$$

We verkrijgen een tijdsafgeleide van een bepaalde functie. Deze functie noemen we de Hamiltoniaan h en is duidelijk behouden.

Hamiltoniaan:

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$$

2.5.2

Toon aan via de stelling van Euler, dat in dit geval de Hamiltoniaan correspondeert met de totale energie van het systeem.

Laat ons beginnen met het formuleren van de stelling van Euler voor een homogene functie van graad n:

$$\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, ...) = nf(x_1, x_2, ...)$$

We vonden in de vorige afleiding al dat de kinetische energie een homogene veelterm van graad 2 in de veralgemeende snelheden is, waar wij dus de stelling van Euler op kunnen toepassen:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

Dit probleem is beperkt tot een conservatief systeem, dus $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, zodat:

$$h = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

2.5.3

Ga na wat in het geval van conservatieve gegeven krachten, maar tijdsafhankelijke holonome bindingen, de gevolgen zijn voor de Hamiltoniaan van het systeem.

De transformatie naar veralgemeende coördinaten (die de tijdsafhankelijke bindingen opleggen), bevatten nu een expliciete tijdsafhankelijkheid:

$$\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_k, t)$$

Dan wordt het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

De kinetische energie is niet langer een holonome veelterm van de 2de graad, maar bevat nu ook elementen van de 1ste en 0de graad:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\dot{\vec{r}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 = T_2 + T_1 + T_0$$

met

$$T_2 = \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)$$

$$T_1 = 2 \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Conservatieve krachten, afgeleid uit een potentiaal $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i)$, die enkel van de Cartesische coördinaten afhangt. Drukt men deze uit met veralgemeende coördinaten, dan zien we dat de potentiaal nu ook een expliciete tijdsafhankelijkheid bevat: $V \equiv V(q_k, t)$.

De Lagrangiaan $L = T - V \equiv L(q_k, \dot{q}_k, t)$ hangt nu dus wel degelijk expliciet van de tijd af, en we vinden voor de totale tijdsafgeleide een meer algemene uitdrukking:

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Het systeem voldoet nog steeds aan de Lagrangevergelijkingen, dus krijgen we aan de hand van dezelfde redenering als in de afleiding hierboven:

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Of nog:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Nu kunnen we de Hamiltoniaan terug invoeren en krijgen we:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Met deze vergelijking kan geen energiebehoud geformuleerd worden, wat logisch is vermits via de tijdsafhankelijke bindingen energie aan het systeem wordt overgedragen.

Wat de Hamiltoniaan betreft kan men niet meer stellen dat deze noodzakelijk correspondeert met de totale energie. Gelet op de definitie van de Hamiltoniaan en reeds gebruikte vergelijkingen krijgen we:

$$h = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (T - V) = T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = T_2 - T_0 + V$$

De kinetische termen $T_2 - T_0$ corresponderen duidelijk niet met de kinetische energie $T = T_0 + T_1 + T_2$, tenzij $T_0 = T_1 = 0$. Hiervoor is nodig dat de transformatie die de Cartesische coördinaten uitdrukt in veralgemeende coördinaten, niet expliciet van de tijd afhangt.

Hoofdstuk 3

Centrale kracht problemen

3.1 Reductie van 2- naar 1-lichaamsprobleem

3.1.1

Toon aan, via de Lagrange vergelijkingen, dat de beweging van 2 deeltjes die interageren via conservatieve krachten, equivalent is met enerzijds de vrije beweging van het zwaartepunt, anderzijds de beweging van 1 deeltje met gereduceerde massa onder een potentiaal die enkel afhangt van de relatieve positie van de 2 deeltjes.

Stel twee deeltjes met massa m_1 en m_2, die op mekaar een kracht uitoefenen. We onderstellen de kracht conservatief, dus afkomstig van een potentiaal V:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_2 V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21}$$

V hangt enkel af van de verschilfunctie $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, want is onafhankelijk van de arbitraire keuze van de oorsprong van het Cartesisch assenstelsel.

Er zijn 6 vrijheidsgraden, corresponderend met de Cartesische coördinaten van de positievectoren van de 2 deeltjes. We voeren eerst veralgemeende coördinaten in, hiervoor kiezen we de positievector $\vec{R}$ van het massamiddelpunt en de verschilvector $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

We inverteren deze vergelijkingen nu zodat we $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ in functie krijgen van $\vec{R}$ en $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Deze leiden we nu af naar de tijd, dit levert het verband tussen Cartesische snelheden en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}$$

We drukken nu de kinetische energie uit aan de hand van veralgemeende snelheden:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{\vec{R}})^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\dot{\vec{r}})^2$$

De Lagrangiaan L = T - V wordt dan:

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{\vec{R}})^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r})$$

De potentiaal hangt enkel van $\vec{r}$ af. De positie van het massamiddelpunt $\vec{R}$ komt niet voor in de Lagrangiaan, bijgevolg zijn de drie componenten van $\vec{R}$ cyclische coördinaten, en $\dot{\vec{R}}$ is constant in de tijd, met andere woorden het massamiddelpunt $\vec{R}$ beweegt met constante snelheid.

De overige termen van de Lagrangiaan hangen niet af van $\vec{R}$ of $\dot{\vec{R}}$, zodat de bewegingsvergelijkingen voor $\vec{r}$ worden bekomen op basis van de Lagrangiaan:

$$L_{rel} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r})$$

Dit is dezelfde Lagrangiaan als voor een deeltje dat beweegt in een potentiaal $V(\vec{r})$ opgewekt door een krachtcentrum in de oorsprong, en met een gereduceerde massa μ:

$$L_{rel} = \frac{1}{2}\mu(\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r})$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

De inverses van de massa's zijn simpel gerelateerd:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

3.2 Bewegingsvergelijkingen en eerste integralen van de beweging

3.2.1

Toon aan dat voor 1 deeltje onderworpen aan een conservatieve centrale kracht, de beweging plaatsvindt in een vlak, namelijk het vlak door het krachtcentrum loodrecht op het draaimoment, dat een behouden grootheid is.

Bij een centrale kracht is $\vec{F} \parallel \vec{r}$, zodat het krachtmoment $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ rond O verdwijnt. Omdat $\dot{\vec{L}} = \vec{N} = 0$, is $\vec{L}$ een behouden grootheid. $\vec{L}$ is een vaste vector waar $\vec{r}(t)$ altijd orthogonaal opstaat wegens $\vec{L} = \vec{r}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t)$. Bijgevolg speelt de beweging zich af in een vlak door O loodrecht op $\vec{L}$.

Bewegingen onder invloed van een centrale kracht, spelen zich altijd af in een vlak.

3.2.2

Ga over op bolcoördinaten en bespreek het particuliere geval als het draaimoment rond het krachtcentrum verdwijnt, en het deeltje op een rechte door het krachtcentrum beweegt.

Stel: $\vec{L} = 0$. Het is niet zinvol om te spreken over een vlak loodrecht op $\vec{L}$. We tonen aan dat in dit specifiek geval de beweging gebeurt langs een rechte door O.

We voeren eerst bolcoördinaten (r, ψ, θ) in als veralgemeende coördinaten. Deze zijn als volgt gerelateerd aan de Cartesische coördinaten (x, y, z):

$$x = r \sin\psi \cos\theta$$

$$y = r \sin\psi \sin\theta$$

$$z = r \cos\psi$$

De tijdsafgeleide levert het verband tussen de Cartesische snelheidscomponenten $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ en de veralgemeende snelheden $(\dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$:

$$\dot{x} = \dot{r} \sin\psi \cos\theta + r\dot{\psi} \cos\psi \cos\theta - r\dot{\theta} \sin\psi \sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin\psi \sin\theta + r\dot{\psi} \cos\psi \sin\theta + r\dot{\theta} \sin\psi \cos\theta$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos\psi - r\dot{\psi} \sin\psi$$

We vatten dit nu samen in termen van 3 orthogonale eenheidsvectoren $(\vec{n}_r, \vec{n}_\psi, \vec{n}_\theta)$ waarvan de Cartesische componenten zijn gegeven door:

$$\vec{n}_r = (\sin\psi \cos\theta \ , \ \sin\psi \sin\theta \ , \ \cos\psi)$$

$$\vec{n}_\psi = (\cos\psi \cos\theta \ , \ \cos\psi \sin\theta \ , \ -\sin\psi)$$

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta \ , \ \cos\theta \ , \ 0)$$

De Cartesische snelheidsvector $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ wordt dan:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{n}_r + r\dot{\psi}\vec{n}_\psi + r\dot{\theta} \sin\psi \vec{n}_\theta$$

De kinetische energie T wordt dan:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + r^2\dot{\theta}^2(\sin^2\psi)\big)$$

Voor dit centrale kracht probleem impliceert $\vec{L} = \vec{o}$ dat:

$$0 = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$0 = \begin{vmatrix} \vec{n}_r & \vec{n}_\psi & \vec{n}_\theta \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\psi} & r\dot{\theta}\sin\psi \end{vmatrix}$$

$$0 = r^2\dot{\psi}\vec{n}_\theta - r^2\dot{\theta}\sin\psi\vec{n}_{psi}$$

Hieruit volgt dat $0 = \dot{\psi} = \dot{\theta}$: de richting van het deeltje blijft constant, en de beweging is dus langs een rechte door de oorsprong O.

3.2.3

Toon aan dat bij een algemene beweging onder invloed van een conservatieve, centrale kracht de perksnelheid constant is. Anders gezegd: toon aan dat de positievector van het deeltje in zijn vlakke baan rond het krachtcentrum in gelijke tijdsintervallen, gelijke oppervalktes beschrijft.

We noemen $|\vec{L}| = l > 0$ de constante grootte van $\vec{L}$. We zoeken eerst de waarde van l:

We bepalen de Lagrangiaan L = T - V in vlakke poolcoördinaten ($\psi = \pi/2, \dot{\psi} = 0$). Zoals we hiervoor al afgeleid hebben, kunnen we de kinetische energie T schrijven in functie van veralgemeende snelheden:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + r^2\dot{\theta}^2(\sin^2\psi)\big)$$

Dit vereenvoudigen we:

$$T = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big)$$

De Lagrangiaan wordt dan:

$$L = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) - V(r)$$

En het toegevoegd moment:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \vec{n}_z \cdot \vec{L} = l$$

De coördinaat θ is cyclisch (komt niet voor in de Lagrangiaan, $\partial L/\partial\theta = 0$) dus de Lagrangevergelijking voor θ herleidt zich tot $\dot{p}_\theta = 0$ en dus is p_θ behouden.

De constante perksnelheid bij beweging onder invloed van een centrale kracht is hier een onmiddelijk gevolg van. In een tijd dt zwiept de positievector over een oppervlak:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Dus vinden we voor de perksnelheid:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = constant$$

3.2.4

Toon aan, via behoud van draaimoment, dat de bewegingsvergelijking voor een deeltje in een conservatief krachtveld kan gereduceerd worden tot een 2de orde differentiaalvergelijking in de afstand tot het krachtcentrum.

We hadden twee afleidingen terug al de Lagrangiaan in poolcoördinaten:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

We leiden dit nu af naar r en $\dot{r}$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

We vullen dit nu in in de Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{r} - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Behoud van draaimoment $mr^2\dot{\theta} = l$ kan nu gebruikt worden om de $\dot{\theta}$-afhankelijkheid te elimineren:

$$mr^2\dot{\theta} = l \qquad \Longrightarrow \qquad m^2r^4\dot{\theta}^2 = l^2$$

We kunnen nu $\dot{\theta}^2$ vervangen:

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Hierdoor hebben we de differentiaalvergelijking voor r ontkoppeld van die van θ. Wat overblijft is een 2de orde differentiaalvergelijking voor de onbekende functie $r(t)$.

3.2.5

Toon aan, via behoud van zowel energie als draaimoment, dat het probleem gereduceerd kan worden tot een 1ste orde differentiaalvergelijking. Geef ook een formele oplossing.

Ook de energie is een eerste integraal van de beweging (de energie blijft behouden):

$$E = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

Via behoud van draaimoment $mr^2\dot{\theta} = l$ kan opnieuw de $\dot{\theta}$-afhankelijkheid geëlimineerd worden:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{l^2}{m^2r^4}\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Wat overblijft is een 1ste orde differentiaalvergelijking in $r(t)$. We zoeken een principiële oplossing: oplossen naar $\dot{r}$:

$$\dot{r} = (\pm)\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

We nemen aan dat voor dit stuk van de baan $\dot{r} > 0$. Stel $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, dan krijgen we:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = dt$$

Stel dat op begintijdstip t_0 de afstand $r(t_0)$ is. Integreer dan van $(t_0, r(t_0))$ tot $(t, r(t))$:

$$\int_{r(t_0)}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Dit levert $t(r)$, dus t in functie van r. De inverse functie $r(t)$ kan dan, tenminste formeel, bepaald worden.

De hoeksevolutie $\theta(t)$ kan worden bepaald uit het draaimoment $l = mr^2\dot{\theta}$, nu $r(t)$ bekend is.

$$l = mr^2\frac{d\theta}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad d\theta = \frac{l}{mr^2(t)}dt$$

Als de hoek op begintijdstip t_0 gelijk is aan $\theta(t_0)$, dan volgt door integratie:

$$\frac{l}{m}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r^2(t)}dt = \int_{\theta_{t_0}}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_{t_0}$$

De baan van het deeltje in vlakke poolcoördinaten, $r(t)$ en $\theta(t)$, is nu gekend als functie van de tijd.

3.3 Equivalent 1-dimensionaal probleem en classificatie van orbitalen

3.3.1

Toon aan dat de 1ste-orde radiale bewegingsvergelijking equivalent is met een 1-dimensionaal probleem met fictieve potentiaal gelijk aan de som van de echte potentiaal en de centrifugale bijdrage. Schets het verloop van de fictieve potentiaal in geval van de attractieve invers-kwadratische krachtwet, en geef een kwalitatieve bespreking van de beweging voor verschillende waarden van de energie.

We definiëren de fictieve potentiaal als volgt:

$$V'(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

V' is dan de potentiële energie voor een fictief 1-dimensionale beweging (langs de 'r-as') en V(r) de echte potentiaal van het tweedimensionaal probleem (poolcoördinaten).

We vinden inderdaad de afgeleide kracht:

$$F'(r) = -\frac{dV'}{dr} = -\frac{dV}{dr} + \frac{l^2}{mr^3}$$

Ook voor de andere eerste integraal van de beweging, de energie E, blijkt er consistentie:

$$E' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Her verloop van de fictieve potentiaal in het geval van de attractieve invers-kwadratische krachtweg:

.

3.4 Differentiaalvergelijking voor de orbitaal

3.4.1

Zet de 1ste-orde radiale differentiaalvergelijking in r(t) om in een rechtstreekse differentiaalvergelijking voor de orbitaal $u(\theta)$ met $u = 1/r$. Bespreek, in geval van een gebonden beweging tussen twee keerpunten, de voorwaarde voor een gesloten orbitaal.

Een simpel verband tussen infinitesimale toenames van dt en $d\theta$ volgt uit het behoud van draaimoment:

$$l = mr^2\dot{\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad l = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{mr^2}{l}d\theta$$

Dit laat toe de hoek θ als onafhankelijke variabele te nemen, en de tijdsafgeleide van een functie f kan dan via de kettingregel omgezet worden tot:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{df}{d\theta}$$

We zien dat dit neerkomt op het vervangen van een tijdsafgeleide door:

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$$

Voor de energie E vonden we eerder al:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

We vervangen nu de tijdsafgeleide in deze vergelijking:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}$$

Dan krijgen we voor de totale energie E:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Dit is een 1ste-orde differentiaalvergelijking voor de orbitalen. Deze vergelijking werken we eerst wat verder uit:

$$\frac{2mE}{l^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2m}{l^2}V(r)$$

Stel nu een functie $u(\theta) = 1/r(\theta)$, met:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

Dit substitueren we nu in onze vergelijking:

$$\frac{2mE}{l^2} = u^4\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{l^2}V$$

$$\frac{2mE}{l^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{l^2}V$$

We lossen deze vergelijking nu op naar $du/d\theta$ (een stuk van de baan waar $dr/d\theta > 0$ is):

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V}$$

Wanneer is de orbitaal dan gesloten? Hiervoor gebruiken we de laatst gevonden differentiaalvergelijkingen en herschrijven deze tot:

$$d\theta = -\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V}}$$

Voor een gebonden beweging tussen twee keerpunten levert deze vergelijking de hoek tussen de voerstralen naar de keerpunten als:

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta = -\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V}}$$

$$\theta_{max} - \theta_{min} = -\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V}}$$

Als deze hoek gelijk is aan $2\pi q$, met $q \in \mathbb{Q}$, dan sluiten de baansegmenten op mekaar aan, en is de orbitaal gesloten.

3.5 Het Keppler vraagstuk

3.5.1

In geval van een invers kwadratische krachtwet: voer de eccentriciteit in en bespreek de keerpunten voor de verschillende waarden van de energie: $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$

Dit geldt bijvoorbeeld vor het gravitatieveld van de zon (vast in de oorsprong): attractieve kracht $\vec{F}$ met potentiaal V:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{n}_r \qquad\qquad V = -\frac{k}{r}$$

Dit geeft de volgende fictieve 1-dimensionale potentiaal:

$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

We zoeken eerst de minimale waarde van de potentiaal. Dit doen we aan de hand van de afgeleide, als een functie een extremum bereikt, wordt zijn afgeleide nul:

$$\frac{dV'}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{2l^2}{2mr^3} = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\left(k - \frac{l^2}{mr}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k - \frac{l^2}{mr} = 0$$

$$r = \frac{l^2}{mk}$$

Nu we weten bij welke r de potentiaal minimaal wordt, kunnen we deze terug invullen in de vergelijking van de potentiaal en zo de minimale waarde bepalen:

$$V'_{min} = -k\left(\frac{mk}{l^2}\right) + \frac{l^2}{2m}\left(\frac{mk}{l^2}\right)^2 = \frac{-2mk^2 + mk^2}{2l^2} = -\frac{mk^2}{2l^2}$$

Fysisch zinvolle energieën voldoen dus aan:

$$E \geq -\frac{mk^2}{2l^2}$$

Dit werken we verder uit:

$$E + \frac{mk^2}{2l^2} \geq 0$$

$$\frac{2El^2 + mk^2}{2l^2} \geq 0$$

$$\frac{2El^2 + mk^2}{2l^2\ mk^2} \geq 0/mk^2$$

$$1 + \frac{2El^2}{mk^2} \geq 0$$

Nu definiëren we de eccentriciteit als volgt:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

$E > 0 \implies e > 1$, $E = 0 \implies e = 1$, $E < 0 \implies e < 1$
De minimale waarde voor e, $e = 0$, wordt bereikt voor $E = V'_{min}$

Afhankelijk van de waarde van E zijn er 1 of 2 keerpunten. Dit zijn de afstanden die voldoen aan $E = V'(r)$, of nog: die de wortels zijn uit:

$$E = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

We voeren opnieuw de variabele u = 1/r in:

$$E = -ku + \frac{l^2}{2m}u^2$$

$$0 = u^2 - \frac{2mk}{l^2}u - \frac{2mE}{l^2}$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking waar we de discriminant kunnen van bepalen:

$$D = \frac{4m^2k^2}{l^4} + 4\frac{2mEl^2}{l^4} = \frac{4m^2k^2 + 8mEl^2}{l^4}$$

Dan zijn de twee reële wortels:

$$u_\pm = \frac{\frac{2mk}{l^2} \pm \frac{\sqrt{4m^2k^2+8mEl^2}}{l^2}}{2} = \frac{mk \pm mk\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}{l^2} = \frac{mk}{l^2}(1 \pm e)$$

We bespreken nu de drie mogelijkheden: $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$

$E > 0$; $e > 1$**:**

$u_- < 0$ en is fysisch niet relevant. Enkel de u_+ oplossing is altijd aanwezig, en definieert het perihelion, dat is de afstand van de dichtste nadering:

$$r_{per} = \frac{1}{u_+}$$

$E < 0$; $e < 1$**:**

Zowel u_- als u_+ zijn gedefinieerd. u_- definieert het aphelion, dat is de maximale afstand:

$$r_{ap} = \frac{1}{u_-} \qquad r_{per} = \frac{1}{u_+}$$

$E = 0$; $e = 1$**:**

Dit is een speciaal geval, nu hebben we voor het perihelion:

$$r_{per} = \frac{l^2}{2mk}$$

Het aphelion ligt op oneindig.

3.5.2

Toon aan dat de mogelijke orbitalen kegelsneden zijn, en dat de verschillende waarden van de energie corresponderen met respectievelijk ellipsen, parabolen en hyperbolen.

We nemen er eerst de orbitaalvergelijking terug bij:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2m}{l^2}V}$$

Hierin substitueren we $V = -k/r = -ku$:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2mk}{l^2}u} = -\frac{mke}{l^2}\sqrt{1-x^2}$$

met

$$x = \frac{1}{e}\left(\frac{l^2}{mk}u - 1\right)$$

We herschrijven dit:

$$\frac{mke}{l^2}d\theta = -\frac{du}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dit kunnen we nu integreren:

$$\frac{mke}{l^2}\int d\theta = -\int \frac{du}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{mke}{l^2}\theta = \frac{mke}{l^2}\arccos x$$

Hieruit volgt:

$$\theta = \arccos x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{e}\left(\frac{l^2}{mk}u - 1\right) = \cos\theta$$

Deze laatste vergelijking lossen we nu op naar u en dat levert voor de orbitaal:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + e\cos\theta)$$

Dit is de vergelijking in poolcoördinaten van een kegelsnede met de oorsprong in een brandpunt en met eccentriciteit e.

Voor $\theta = 0$ vinden we het perihelion terug, de dichtste nadering bevindt zich dus op de positieve x-as.

$E > 0\ :\ e > 1$	hyperbool als ongebonden orbitaal
$E = 0\ :\ e = 1$	parabool als ongebonden orbitaal
$E < 0\ :\ e < 1$	ellips als gebonden orbitaal
$e = 0$	cirkel als gebonden orbitaal

3.5.3

Bespreek de drie wetten van Kepler voor planetenbeweging.

Eerste wet van Keppler:

Een planeet beweegt in een ellips met de zon in 1 van de brandpunten. We hebben dus een negatieve energie, zodat de eccentriciteit e kleiner dan 1 is.

Tweede wet van Keppler:

De wet der perken: bij beweging onder invloed van een centrale kracht (bv. de gravitatiekracht) heerst een constante perksnelheid, of nog: in gelijke tijdsintervallen wordt eenzelfde oppervlak beschreven.

Derde wet van Keppler:

Het kwadraat van de omlooptijd van de planeten is evenredig met de derde macht van de grote as van hun ellipsvormige baan.

Merk op dat de constante in de krachtwet gelijk is aan $k = GmM_O$, zodat de verhouding m/k hetzelfde is voor alle planetaire banen (met de zon als oneindig massief beschouwd).

3.6 De Laplace-Runge-Lenz vector

3.6.1

Toon aan dat, in het geval van een attractieve invers kwadratische krachtwet $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{n}_r$, de LRL-vector een behouden grootheid is, en geef een interpretatie.

We definiëren eerst de Laplace-Runge-Lenz vector:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r}$$

We hebben dus net als bij gravitatie dat:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{n}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

We starten met de Newton-bewegingsvergelijking:

$$\dot{\vec{p}} - \vec{F} = 0$$

We kunnen dit nu vectorieel vermenigvuldigen met het draaimoment:

$$0 = (\dot{\vec{p}} - \vec{F}) \times \vec{L}$$

Dit werken we nu verder uit met $L = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$:

$$0 = \big(\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\big) + \big(-\vec{F} \times \vec{L}\big)$$

$$0 = \big(\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\big) + \left(\frac{k}{r^3}\vec{r} \times \big(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\big)\right)$$

Nu gebruiken we een aantal eigenschappen. Eerst voor de eerste term:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \big(\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\big) + \big(\vec{p} \times \dot{\vec{L}}\big)$$

Aangezien $\vec{L}$ een behouden grootheid is, is $\dot{\vec{L}} = 0$. Daardoor valt de tweede term weg en krijgen we:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \big(\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\big)$$

Voor de tweede term gebruiken we volgende identiteit:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Dan wordt onze vergelijking de volgende:

$$0 = \left(\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L})\right) + \left(\left(\frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot m\dot{\vec{r}}\right)\vec{r} - \left(\frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot \vec{r}\right)m\dot{\vec{r}}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L})\right) + \frac{mk}{r^3}\left((\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}\right)$$

De laatste term in deze vergelijking is ook een totale tijdsafgeleide, vermits:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2) = r\dot{r}$$

en

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{mk}{r}\vec{r}\right) = \frac{mk}{r^2}\dot{r}\vec{r} - \frac{mk}{r}\dot{\vec{r}}$$

Dit kunnen we nu opnieuw substitueren in onze vergelijking:

$$0 = \left(\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) \right) + \frac{mk}{r^3} \left((\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2 \dot{\vec{r}} \right)$$

$$0 = \left(\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) \right) + \frac{mk}{r^3} \left(r\dot{r}\vec{r} - r^2 \dot{\vec{r}} \right)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left((\vec{p} \times \vec{L}) \right) + \frac{d}{dt} \left(-\frac{mk}{r} \vec{r} \right)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left((\vec{p} \times \vec{L}) - \frac{mk}{r} \vec{r} \right) \qquad = \frac{dA}{dt}$$

Hieruit volgt dat de Laplace-Runge-Lenz vector constant is in de tijd gedurende de beweging onder invloed van een invers kwadratische krachtwet, met andere woorden $\vec{A}$ is een behouden vectorgrootheid.

Hoe kunnen we dit nu interpreteren?

...

Hoofdstuk 4

Kinematica van de beweging van een star lichaam

4.1 Vrijheidsgraden van een star lichaam

4.1.1

De onderlinge oriëntatie van twee Cartesische assenkruisen met gemeenschappelijke oorsprong kan worden vastgelegd door de richtingscosinussen $\cos\theta_{ij} = \vec{n_i}' \cdot \vec{n_j}$, zijnde de scalaire producten van de eenheidsvectoren volgende de assen van het ene stelsel met die van het andere stelsel. Toon aan dat de componenten van een arbitraire vector in de beide assenkruisen, met elkaar verbonden zijn door een lineaire transformatie op basis van de richtingscosinussen.

We hebben dus gegeven dat:

$$\cos\theta_{ij} = \vec{n_i}' \cdot \vec{n_j}$$

met $i, j = 1, 2, 3$ voor respectievelijk x, y en z.

Er geldt dat:

$$\vec{n_i} = \sum_j (\vec{n_i} \cdot \vec{n_j}')\vec{n_j}' = \sum_j \cos\theta_{ji}\ \vec{n_j}'$$

$$\vec{n_i}' = \sum_j (\vec{n_i}' \cdot \vec{n_j})\vec{n_j} = \sum_j \cos\theta_{ij}\ \vec{n_j}$$

Onze arbitraire vector $\vec{G}$ heeft in O'xyz componenten:

$$G_i = \vec{G} \cdot \vec{n_i}$$

en kan dus ontbonden worden als:

$$\vec{G} = \sum_i G_i\vec{n_i} = \sum_i G_i \sum_j \cos\theta_{ji}\ \vec{n_j}' = \sum_j \left(\sum_i G_i \cos\theta_{ji} \right) \vec{n_j}'$$

En dus hebben we voor alle componenten in het O'x'y'z'-assenkruis:

$$G_j' = \vec{G} \cdot \vec{n_j}' = \sum_i \cos\theta_{ji} G_i$$

4.1.2

Toon aan dat een 3x3-matrix [O] met als elementen de richtingscosinussen, een orthogonale matrix is.

We definiëren de matrix als volgt:

$$[O]_{ij} = \cos\theta_{ij}$$

We hebben 6 relaties tussen de $\cos\theta_{ij}$, wegens het feit dat de $\vec{n_i}$, evenals de $\vec{n_i}'$, een orthonormale basis vormen. Dat wil zeggen dat:

$$\vec{n_i} \cdot \vec{n_k} = \delta_{ik}$$

voor $i \leq k$. $\quad (\delta_{ik} = 1 \text{ als } i = k \;\; , \;\; \delta_{ik} = 0 \text{ als } i \neq k)$

We gebruiken een aantal vergelijkingen uit de vorige afleiding:

$$\begin{aligned}
\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k &= \sum_{nm} \cos\theta_{ni} \cos\theta_{mk} \; \vec{n}'_n \cdot \vec{n}'_m \\
&= \sum_{nm} \cos\theta_{ni} \cos\theta_{mk} \; \delta_{nm} \\
&= \sum_{n} \cos\theta_{ni} \cos\theta_{nk}
\end{aligned}$$

zodat $\delta_{ik} = \sum_n \cos\theta_{ni} \cos\theta_{nk}$

De orthonormaliteitsbetrekkingen van de $\vec{n}'_i$ leiden op analoge wijze tot:

$$\vec{n}'_i \cdot \vec{n}'_k = \delta_{ik} = \sum_n \cos\theta_{in} \cdot \cos\theta_{kn}$$

Beschouwen we nu de 3×3 -matrix $[O]$ met:

$$[O]_{ij} = \cos\theta_{ij}$$

dan volgt dat $[O]^T[O] = [1]$, want:

$$\delta_{ik} = \sum_n \cos\theta_{ni} \cos\theta_{nk} = \sum_n [O]_{ni}[O]_{nk} = \sum_n \left([O]^T\right)_{in}[O]_{nk}$$

$$\delta_{ik} = \left([O]^T[O]\right)_{ik} \qquad \Longrightarrow \qquad [O]^T[O] = [1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Op analoge wijze heeft men dat $[O][O]^T = [1]$. Men mag hieruit besluiten dat $[O]$ een orthogonale matrix is, want:

$$[O] \in O(3) \qquad \Leftrightarrow \qquad [O]^{-1} = [O]^T$$

dit volgt uit:

$$[O]^T[O] = [1] = [O][O]^T$$

4.2 De Eulerhoeken

4.2.1

Toon aan dat [O] een speciale orthogonale matrix is, dus dat de determinant van [0] gelijk is aan 1, voor een transformatie tussen assenkruisen met eenzelfde (bijvoorbeeld rechtshandig) karakter, en dat voor de beschrijving van starre lichamen dit de relevante transformaties zijn.

De stand van het assenstelsel vast verbonden aan het lichaam zal wijzigen gedurende de beweging, maar het is duidelijk dat de 'handedness' niet verandert (als men een rechtsdraaiende schroef beweegt en ronddraait, wordt dit ook niet opeens een linksdraaiende schroef).

Zij $[P]$ de matrix van de zogenaamde 'pariteitstransformatie':

$$[P] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -[1]$$

dan ziet men in dat $det[P] = -1$, en $[P]$ het rechtshandig assenkruis omvormt in een linkshandig:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \qquad\qquad \vec{n}'_i = -\vec{n}_i \\ z' &= -z \end{aligned}$$

en dus krijgen we $\vec{n}'_1 \times \vec{n}'_2 = -\vec{n}'_3$.

Nu kan kan elke orthogonale $3\times3-matrix$ $[O]$ met $det[O] = -1$ geschreven worden als $[P](-[O])$, met andere woorden als het product van de pariteitstransformatie en een orthogonale matrix $(-[O])$ waarvoor $det(-[O]) = +1$. Bijgevolg zullen dergelijke matrices de handedness van het assenstelsel wijzigen, en moeten zij uitgesloten worden bij de beschrijving van de stand van een star lichaam.

Vandaar de beperking tot speciale orthogonale $3 \times 3 - matrices$ (met $det([O]) = +1$), die coördinaatstransformaties tussen assenstelsels met dezelfde handedness beschrijven.

4.2.2

Toon aan dat elke transformatie tussen twee Cartesische rechtshandige assenkruisen kan bekomen worden door een opeenvolging van drie eenvoudige rotaties rond coördinaatsassen over de Eulerhoeken ϕ, θ, ψ.

.

.

4.3 Stelling van Euler over de beweging van een star lichaam

4.3.1

Toon aan dat elke $SO(3)$ -matrix $[O]$ een rotatie in de 3-dimensionale ruimte rond een as door de oorsprong beschrijft, met andere woorden toon aan dat een transformatie $[X'] = [O][X]$ die de coördinaten van een punt $[X]$ omzet in de coördinaten van een nieuw punt $[X']$ voldoet aan: (1) de grootte van $[X]$ blijft onveranderd, en (2) er is een as door de oorsprong waarvan de punten onveranderd blijven onder de transformatie.

(1) We bewijzen dat de grootte van de positievector niet wijzigt. De grootte van de vector schrijven we als volgt:

$$\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [X]^T[X]$$

We krijgen dus:

$$[X]^T[X] = [X']^T[X']$$

Dit is een kenmerkende eigenschap van alle orthogonale matrices:

$$[X']^T[X'] = [X]^T[O]^T[O][X] = [X]^T[1][X] = [X]^T[X]$$

gebruikmakend van het gegeven $[X'] = [O][X]$.

(2) Dit komt neer op het bewijzen van de aanwezigheid van een rotatie-as, dus aantonen dat $[O]$ een eigenwaarde $+1$ heeft. De corresponderende eigenvector is dan gericht volgens de rotatie-as.

De eigenwaarden λ van $[O]$ voldoen aan de seculiere vergelijking:

$$det([O] - \lambda[1]) = 0$$

Nu is voor elke orthogonale matrix:

$$([O] - [1])[O]^T = [1] - [O]^T$$

Dit werken we verder uit door van beide leden de determinant te nemen:

$$det([O] - [1])det[O]^T = det([1] - [O]^T)$$

Aangezien $det([O]^T) = det([O])$ krijgen we:

$$det([O] - [1])det([O]) = det([1] - [O])$$

Per definitie heet een $SO(3)$-matrix een determinant van 1:

$$det([O] - [1]) = det([1] - [O])$$

$$det([O] - [1]) = -det([0] - [1])$$

Hieruit volgt dan:

$$det([O] - [1]) = 0$$

4.4 Eindige rotaties van het assenkruis

4.4.1

Stel de coördinatentransformatie op voor een rotatie van het assenkruis over een hoek Φ, rond een as door de oorsprong met eenheidsvector $\vec{n}$, met de rotatieformule:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\Phi + \vec{n}(\vec{r}\cdot\vec{n})(1-\cos\Phi) + (\vec{r}\times\vec{n})\sin\Phi$$

4.5 Infinitesimale rotaties

4.5.1

4.6 Het Corioliseffect

4.6.1

.

Hoofdstuk 5

De bewegingsvergelijkingen van starre lichamen

5.1 Draaimoment en kinetische energie bij de beweging rond een punt

5.1.1

Druk het draaimoment van een star lichaam met 1 punt vast in de ruimte (dat als oorsprong wordt genomen) uit in termen van de rotatievector, en voer de componenten van de traagheidstensor in.

Het draaimoment rond een vast punt wordt gegeven door:

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n$$

waarbij gesommeerd wordt over de (discrete) massapunten van het starre lichaam.

De $\vec{r}_n$ zijn de positievectoren van punten vast in het starre lichaam. Gelet op:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_b + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

is dus de snelheid $\vec{v}_n$ enkel afkomstig van het wentelen van het starre lichaam:

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n$$

Het draaimoment wordt dan:

$$\vec{L} = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

Dit werken we nu verder uit aan de hand van volgende eigenschap: $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

$$\vec{L} = \sum_n m_n \Big((\vec{r}_n)^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n) \vec{r}_n \Big)$$

Nu splitsen we deze vergelijking op in componenten, we krijgen voor de i-de component:

$$\vec{L}_i = \sum_n m_n \Big(r_n^2 \omega_i - x_{ni} \sum_j \omega_j x_{nj} \Big) = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

met

$$I_{ij} = \sum_n m_n \big(\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj}\big)$$

We kunnen deze vergelijking nu terug algemeen schrijven:

$$\vec{L} = \overline{\overline{I}} \cdot \vec{\omega}$$

met $\overline{\overline{I}}$ de traagheidstensor. Het draaimoment is blijkbaar via een lineaire transformatie verbonden met de rotatievector, met transformatiematrix $I_{ij} = I_{ji}$ (symmetrische matrix). De diagonale elementen noemt men de traagheidsmomenten. Zo is I_{xx} het traagheidsmoment rond de x-as:

$$I_{xx} = \sum_n m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n^2) = \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2) \geq 0$$

De niet-diagonale elementen noemen we de traagheidsproducten. Hier is $\delta_{ij} = 0$, bijvoorbeeld:

$$I_{xy} = -\sum_n m_n x_n y_n$$

5.2 De traagheidstensor en het traagheidsmoment

5.2.1

Druk de kinetische energie van een star lichaam met 1 punt vast in de ruimte uit met behulp van de traagheidstensor en de rotatievector.

In de vorige afleiding vonden we al dat:

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n$$

Nu kunnen we dus de kinetische energie herschrijven:

$$T = \sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_n^2 = \sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_n \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

We herschikken dit aan de hand van $a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b)$:

$$T = \sum_n \frac{1}{2} \vec{\omega} (\vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\overline{I}} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j$$

—

Als $\vec{n}$ de richting van de ogenblikkelijke rotatie-as is, dus $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, dan heeft men nog:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \big(\vec{n} \cdot \overline{\overline{I}} \cdot \vec{n}\big) = \frac{1}{2} \omega^2 I$$

met I het traagheidsmoment rond de rotatie-as, gegeven door:

$$I = \vec{n} \cdot \overline{\overline{I}} \cdot \vec{n} = \sum_{ij} n_i n_j I_{ij} = \sum_n m_n \sum_{ij} n_i n_j (r_n^2 \delta_{ij} - x_{ni} x_{nj})$$

5.3 Hoofdassen van een star lichaam

5.3.1

Toon aan dat onder een rotatie van het assenkruis de componenten van de traagheidstensor $I'_{i'j'}$ in het nieuwe assenkruis verbonden zijn met componenten I_{ij} in het oorspronkelijke assenkruis door:

$$I'_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i}[O]_{j'j} I_{ij}$$

met $[O]$ de transformatiematrix met elementen:

$$[O]_{i'i} = \vec{n}'_{i'} \cdot \vec{n}_i$$

en $\vec{n}_i$ eenheidsvectoren volgens de assen van het oorspronkelijke assenkruis, $\vec{n}'_{i'}$ eenheidsvectoren volgens de assen van het nieuwe assenkruis.

We gaan dus na hoe de traagheidstensor reageert op een verandering van assenkruis $Oxyz$ naar een geroteerd assenkruis $Ox'y'z'$.

In $Oxyz$ is de traagheidstensor:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_n m_n \big[\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj}\big] \\ &= \sum_n m_n \big[(\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j)(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - (\vec{n}_i \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}_j \cdot \vec{r}_n)\big] \end{aligned}$$

In het geroteerde assenkruis $Ox'y'z'$ is de traagheidstensor, analoog:

$$I'_{i'j'} = \sum_n m_n \big[(\vec{n}'_i \cdot \vec{n}'_j)(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - (\vec{n}'_i \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}'_j \cdot \vec{r}_n)\big]$$

Het verband tussen de twee wordt gelegd door de relatie tussen de eenheidsvectoren van het $Oxyz$ en het $Ox'y'z'$ assenkruis:

$$\vec{n}'_{i'} = \sum_i (\vec{n}'_{i'} \cdot \vec{n}_i)\vec{n}_i = \sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i$$

met de gebruikelijke SO(3) matrix $[O]$ die de transformatie tussen de twee assenkruisen bewerkstelligt, dat wil zeggen de componenten van een vector zijn verbonden door $[X'] = [O][X]$.

We substitueren dit nu in de vorige vergelijking:

$$I'_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i}[O]_{j'j} \sum_n m_n \big[(\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j)(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - (\vec{n}_i \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}_j \cdot \vec{r}_n)\big]$$

We hebben nu een verband tussen $I'_{i'j'}$ en I_{ij}:

$$I'_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i}[O]_{j'j} I_{ij}$$

Of in matrixnotatie:

$$[I'] = [O][I][O]^T$$

Hoofdstuk 6

Oscillaties

6.1 Kleine trillingen rond evenwicht: formulering

6.1.1

Leid de normaaltrillingsvergelijking af voor een conservatief systeem met holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen(beschreven door een Lagrangiaan met n veralgemeende coördinaten), voor kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwicht.

We beginnen met het opstellen van de Lagrangiaan. We zoeken dus uitdrukkingen voor de kinetische en potentiële energie systeem.

De kinetische energie vindt men als volgt:

$$\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_k) \equiv \vec{r}_i(q_1, ..., q_n)$$

De snelheid is de afgeleide van de positievector, dit doen we aan de hand van de kettingregel:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}(q_1, ..., q_n)\right)\dot{q}_k$$

De kinetische energie wordt dan:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\left(\sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{q_l}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{kl} m_{kl}(q_1, ..., q_n)\dot{q}_k \dot{q}_l
\end{aligned}$$

met

$$m_{kl}(q_1, ..., q_n) \equiv \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{q_l}$$

De kinetische energie is een veelterm van de tweede graad in de veralgemeende snelheden. De potentiële energie $V(q_1, ..., q_n)$ hangt enkel af van de veralgemeende coördinaten (conservatief systeem).

We zeggen dat het systeem een evenwichtspunt $q_k^0 = q_1^0, ..., q_n^0$ heeft als alle veralgemeende krachten nul zijn in dit punt:

$$Q_k = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0 = 0$$

We bekijken nu kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwichtspunt, dit betekent dat er een begrensde beweging rond het evenwichtspunt optreedt, corresponderend met een minimum van de potentiaalfunctie V. We noteren voor elk veralgemeende coördinaat q_k de afwijking van zijn evenwichtswaarde q_k^0 door:

$$\eta_k = q_k - q_k^0$$

We beschouwen nu de η_k als onze nieuwe veralgemeende coördinaten.

Nu maken we een kwadratische benadering van de potentiaalfunctie. We ontwikkelen $V(q_1, ..., q_n)$ in een machtreeks rond $(q_1^0, ..., q_n^0)$ en breken af bij 2de orde termen. (Vermits we kleine uitwijkingen beschouwen, kunnen we hogere orde termen verwaarlozen.)

$$V(q_1, ..., q_n) = V_0 + \sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k \ + \ \sum_{kl} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 \eta_k \eta_l$$

Dit kunnen we nu vereenvoudigen. De lineaire term valt weg vermits in een evenwichtspunt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0 = \frac{\partial V}{\partial q_k}(q_1^0, ..., q_n^0) = 0$$

Ook de constante term $V_0 = V(q_1^0, ..., q_n^0)$ kan weggelaten worden, aangezien de potentiaal slechts bepaald is op een constante na (arbitraire keuze van het nulpunt voor de energie).

We vinden dus voor de potentiaal:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\eta_k\eta_l$$

waarbij de 2de orde partiële afgeleiden:

$$V_{kl} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 = V_{lk}$$

de elementen vormen van een reëel-symmetrisch $n \times n$ matrix $[V]$.

Op analoge wijze kunnen we de kinetische energie ontwikkelen naar de functies $m_{kl}(q_1, ..., q_n)$, waarbij we opmerken dat $\dot{q}_k = \dot{\eta}_k$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{kl}\left[m_{kl}(q_1^0, ..., q_n^0) + \sum_m \left(\frac{\partial m_{kl}}{\partial q_m}(q_1^0, ..., q_n^0)\right)\eta_m + ...\right]\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l$$

Vermits de $\dot{\eta}_k$ zeer klein worden ondersteld, volstaat het de 1ste (constante) term in [...] over te houden, om consistent tot op 2de orde in de kleine uitwijkingen te werken:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{kl} T_{kl}\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l$$

waarbij:

$$T_{kl} = m_{kl}(q_1^0, ..., q_n^0) = T_{lk}$$

de elementen vormen van een reëel-symmetrische $n \times n$ matrix $[T]$.

We kunnen nu de Lagrangiaan opstellen voor deze 'harmonische benadering':

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{kl} T_{kl}\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l \;-\; \frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\eta_k\eta_l \;=\; \frac{1}{2}\sum_{kl}\left(T_{kl}\dot{\eta}_k\dot{\eta}_l - V_{kl}\eta_k\eta_l\right)$$

We bepalen nu de Lagrange-vergelijking:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_k}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \eta_{k_0}} &= \frac{\partial}{\partial \eta_{k_0}}\left(-\frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\eta_k\eta_l\right) \;=\; -\frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\frac{\partial}{\partial \eta_{k_0}}(\eta_k\eta_l) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\left(\delta_{k_0k}\eta_l + \delta_{k_0l}\eta_k\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\delta_{k_0k}\eta_l \;-\; \frac{1}{2}\sum_{kl} V_{kl}\delta_{k_0l}\eta_k \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{l} V_{k_0l}\eta_l \;-\; \frac{1}{2}\sum_{k} V_{k_0k}\eta_k \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{l}\left(V_{k_0l}\eta_l + V_{k_0l}\eta_l\right) \;=\; -\sum_{l} V_{k_0l}\eta_l
\end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\sum_l V_{kl}\eta_l$$

Analoog vinden we voor de kinetische energie:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = -\sum_l T_{kl}\dot{\eta}_l \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) = \sum_l T_{kl}\ddot{\eta}_l$$

Voor de Lagrangevergelijking krijgen we dan:

$$\sum_l T_{kl}\ddot{\eta}_l + \sum_l V_{kl}\eta_l = 0$$

Dit is een stelsel van n 2de orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, in de n onbekende functies $\eta_k(t)$. De lineariteit en het constant zijn van de coëfficiënten nodigen uit een exponentiële oplossing te beproeven. We proberen dus oplossingen van de vorm:

$$\eta_k(t) = Ca_k e^{-i\omega t}$$

in termen van een reële frequentie ω, en een schaalfactor C en amplitudes a_k die (eventueel) complexe getallen zijn. We nemen met voorinzicht een puur imaginaire exponent omdat we een oscillerend gedrag verwachten. De uitwijkingen η_k zijn uiteraard reëel, maar we kiezen voor de complexe gedaante omdat het makkelijker rekenen is met exponentiële functies dan goniometrische.

$$\dot{\eta}_k(t) = Ca_k(-i\omega)e^{-i\omega t} = -iCa_k\omega e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{\eta}_k(t) = Ca_k(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} = -Ca_k\omega^2 e^{-i\omega t}$$

Dit substitueren we nu in de differentiaalvergelijkingen. Dit leidt onmiddelijk tot een stelsel lineaire vergelijkingen in de amplitudes:

$$\sum_l T_{kl}\eta_k = -\sum_l T_{kl}\ddot{\eta}_k$$

$$\sum_l V_{kl}a_l = \omega^2 \sum_l T_{kl}a_l$$

We kunnen de amplitudes in een $n \times 1$ kolommatrix $[a]$, dan wordt dit:

$$[V][a] = \lambda[T][a]$$

Deze normaaltrillingsvergelijking heeft de vorm van een veralgemeend eigenwaardeprobleem, ter bepaling van de eigenwaarden $\lambda = \omega^2$ en eigenvectoren $[a]$.

6.2 Eigenwaardevergelijking en normaaltrillingen

6.2.1

Onderstel de Hessiaan positief-semidefiniet en de massamatrix positief-definiet. Toon aan dat er altijd n oplossingen zijn (normaaltrillingen), door de normaaltrillingsvergelijking om te vormen tot een gewoon eigenwaardeprobleem voor een symmetrische matrix.

Voorkennis:

De Hessiaan $[V]$ is de potentiaalmatrix in een stationair punt, dus de 2de orde partiële afgeleiden in een punt $(q_1^0, ..., q_n^0)$ in $\mathbb{R}^n$ waarvoor de gradiënt verdwijnt.
De massamatrix $[T]$ is de kinetische matrix die we in de vorige afleiding gedefinieerd hebben.
Positief-definiet: alle eigenwaarden zijn strikt positief.
Positief-semidefiniet: alle eigenwaarden zijn strikt positief of eventueel nul.

Als reëel-symmetrische matrix kan $[T]$ gediagonaliseerd worden door een orthogonale matrix $[O]$:

$$[T] = [O][\lambda][O]^T$$

met $[\lambda]$ een zekere diagonaalmatrix met diagonaalelementen λ^ν. Dit laat toe de vierkantswortel $[T]^{1/2}$ te definiëren als:

$$[T]^{1/2} = [O][\sqrt{\lambda}][O]^T$$

dus $[T]^{1/2}$ heeft dezelfde eigenvectoren als $[T]$, maar met eigenwaarden $\sqrt{\lambda^\nu}$.

Merk op:

$$\begin{aligned} [T]^{1/2}[T]^{1/2} &= [O][\sqrt{\lambda}][O]^T[O][\sqrt{\lambda}][O]^T \\ &= [O][\sqrt{\lambda}][1][\sqrt{\lambda}][O]^T \\ &= [O][\lambda][O]^T \\ &= [T] \end{aligned}$$

$$[T]^{1/2}[T]^{1/2} = [T]$$

Alle eigenwaarden van $[T]^{1/2}$ zijn strikt positief (positief-definiete matrix), zodat ook de inverse matrix $[T]^{-1/2}$ bestaat:

$$\begin{aligned} [T]^{-1/2}[T]^{1/2} &= [O][1/\sqrt{\lambda}][O]^T[O][\sqrt{\lambda}][O]^T \\ &= [O][1/\sqrt{\lambda}][1][\sqrt{\lambda}][O]^T \\ &= [O][1][O]^T \\ &= [1] \end{aligned}$$

$$[T]^{-1/2}[T]^{1/2} = [1]$$

Nu kan men het veralgemeend eigenwaardeprobleem uit de vorige afleiding eenvoudig omvormen:

$$
\begin{aligned}
[V][a] &= \lambda[T][a] \\
[V][1][a] &= \lambda[T]^{1/2}[T]^{1/2}[a] \\
[V][T]^{-1/2}[T]^{1/2}[a] &= \lambda[T]^{1/2}[T]^{1/2}[a] \\
[T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}[T]^{1/2}[a] &= \lambda[T]^{-1/2}[T]^{1/2}[T]^{1/2}[a] \\
[T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}[T]^{1/2}[a] &= \lambda[1][T]^{1/2}[a]
\end{aligned}
$$

Stel nu:

$$[V'] = [T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2} \qquad [a'] = [T]^{1/2}[a]$$

dan krijgen we:

$$[V'][a'] = \lambda[a']$$

We hebben nu een gewoon eigenwaardeprobleem bekomen, voor de $n \times n$-reëel-symmetrische matrix $[V']$. We zijn dus verzekerd van n reële eigenwaarden λ_ν, en van het bestaan van eventueel corresponderende eigenvectoren $[e'^\nu]$.

Hoofdstuk 7

De bewegingsvergelijkingen van Hamilton

7.1 Bewegingsvergelijkingen van Hamilton

7.1.1

Leid de canonische vergelijkingen van Hamilton af voor een systeem met Lagrangiaan.

De Lagrangeformulering maakt gebruik van de Lagrangiaan:

$$L \equiv L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

als scalaire functie die afhangt van n veralgemeende coördinaten $q_k(t)$, n veralgemeende snelheden $\dot{q}_k(t)$ en eventueel nog van een expliciete tijdsafhankelijkheid. De Lagrangevergelijkingen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

leveren n 2de orde differentiaalvergelijkingen met als onbekende functies de $q_k(t)$. Nu willen wij overgaan naar een formulering aan de hand van 2n 1ste orde differentiaalvergelijkingen met als onbekende functies de n veralgemeende coördinaten $q_k(t)$ en de n toegevoegde momenten $p_k(t)$, die wij eerder definieerden als:

$$p_k(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Wij voeren hiervoor een nieuwe scalaire functie in: de Hamiltoniaan:

$$H \equiv H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

We zullen de $\dot{q}_k$-afhankelijkheid in het rechterlid elimineren ten faveure van de momenten p_k. We maken hierbij gebruik van onze definitie voor p_k.

Men kan de totale differentiaal dH op twee manieren uitdrukken, namelijk door differentiatie van respectievelijk het linkerlid en het rechterlid:

$$\sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \; = \; \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

We vereenvoudigen dit nu. We vonden al dat:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad \Longrightarrow \qquad p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

We kunnen dit dus schrappen uit de totale differentiaal en krijgen dan:

$$\sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \; = \; \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Identificatie levert:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = -\frac{d}{dt}(p_k) = -\dot{p}_k$$

Nu hebben we de canonische vergelijkingen van Hamilton:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q_k, p_k, t)$$
$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q_k, p_k, t)$$

Dit geeft ons in totaal 2n 1ste orde differentiaalvergelijkingen in de functies $q_k(t)$ en $p_k(t)$.

7.1.2

Geef een expliciete constructie van de Hamiltoniaan in matrix notatie voor het generieke geval van een systeem met conservatieve krachten en een kinetische energie die een homogene kwadratische vorm is in de veralgemeende snelheden.

Een stappenplan voor het opstellen van de Hamiltoniaan:

Bepaal eerst de kinetische energie T en het moment p:

$$T = \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[m(q)][\dot{q}]$$

$$[p] = [m(q)][\dot{q}]$$

Nu wordt de Hamiltoniaan gegeven door:

$$[H] = [p]^T[\dot{q}] - \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[m(q)][\dot{q}] + V(q)$$

We willen af van de $\dot{q}$-afhankelijkheid ten voordele van p:

$$[p] = [m(q)][\dot{q}] \qquad \Longrightarrow \qquad [\dot{q}] = [m(q)]^{-1}[p]$$

$$[\dot{q}]^T = [p]^T[m(q)]^{-1}$$

Dit kunnen we nu in onze vergelijking voor de Hamiltoniaan substitueren, dan krijgen we:

$$[H] = [p]^T[m(q)]^{-1}[p] - \frac{1}{2}[p]^T[m(q)]^{-1}[m(q)][m(q)]^{-1}[p] + V(q)$$

$$[H] = [p]^T[m(q)]^{-1}[p] - \frac{1}{2}[p]^T[m(q)]^{-1}[p] + V(q)$$

$$[H] = \frac{1}{2}[p]^T[m(q)]^{-1}[p] + V(q)$$