Examen Differentiaalmeetkunde (22 augustus 2023, 13u–17u)

Enkele instructies

- Schrijf op elk blad dat je afgeeft **je naam en je studentennummer**. Bladen zonder naam worden niet verbeterd.
- Schrijf je antwoorden op het theoriegedeelte en het oefeningengedeelte op **aparte** bladen. Als je klaar bent met theorie geef je die antwoorden af, en haal je je cursus om verder te werken aan de oefeningen.
- Geef een **zo duidelijk mogelijk** antwoord op **alle** vragen die gesteld worden. Het is de bedoeling om ons te overtuigen dat je het antwoord op de vraag weet.
- Noteer ook iets als je het antwoord op een vraag **niet** weet. Bv. "Theorie 2 (b): Geen antwoord".

Veel succes!

Theorie (gesloten boek)

1. (4 ptn) Beschouw een reguliere kromme $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ met booglengte als parameter.
   (a) Definieer de raakvector $\mathbf{t}(s)$ en de kromming $1/\rho(s)$.
   (b) Onderstel dat $1/\rho(s) \neq 0$ voor alle $s \in I$. Definieer de hoofdnormaal $\mathbf{n}(s)$ en de binormaal $\mathbf{b}(s)$.
   (c) Leid de formules van Frenet af; definieer hiervoor ook de wringing $\tau(s)$.
2. (4 ptn) Beschouw twee oppervlakken $\boldsymbol{\sigma} : U \to \Sigma$ en $\boldsymbol{\sigma}_V : V \to \tilde{\Sigma}$.
   (a) Geef de definities van een diffeomorfisme en een isometrie tussen beide oppervlakken.
   (b) Geef en bewijs de karakterisatie van een isometrie in termen van de eerste grondvormen van de oppervlakken.
   (c) Definieer de oppervlakte van een deel $D \subseteq \Sigma$. Toon aan dat isometrieën delen van Σ afbeelden op delen van $\tilde{\Sigma}$ met dezelfde oppervlakte.
3. (2 ptn) Beschouw twee $\mathcal{C}^\infty$-differentieerbare variëteiten M en N.
   (a) Geef de definitie van een gladde afbeelding tussen M en N.
   (b) Zij $f : M \to N$ een gladde afbeelding, $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ en $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ willekeurige toelaatbare kaarten van M en N respectievelijk. Toon aan dat de lokale representant $f_{\tilde{\phi}\tilde{\psi}}$ een gladde afbeelding is (in de klassieke betekenis).

Oefeningen (open boek)

1. (3 ptn) Beschouw de kromme $\mathbf{c}(x) = (x^3, 1, 3x^2)$, $x > 0$, gelegen op het oppervlak $\sigma(x,y) = (x^3y^3, y, 3x^2y^2)$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.
   (a) Bereken de normale kromming en toon aan dat $\mathbf{c}$ een geodeet is.
   (b) Geef een parametervoorstelling van deze kromme met booglengte als parameter.
2. (3 ptn) De *hyperboloïde* met vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ is zowel een regeloppervlak als een omwentelingsoppervlak. Vind 3 verschillende geodeten door het punt $(1, 0, 0)$ en verklaar waarom het geodeten zijn.
3. (4 ptn) De *Hopf-fibratie* is de afbeelding

$$h : S^3 \longrightarrow S^2$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2(x_1x_2 + x_3x_4),\ 2(x_1x_4 - x_2x_3),\ (x_1^2 + x_3^2) - (x_2^2 + x_4^2)).$$

Bereken het beeld van de raakvector $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{\mathbf{m}}$ aan $\mathbf{m} = (0, 0, 0, 1) \in S^3$ onder de Hopf-fibratie. Neem hiervoor de kaart (U_4^+, π_4) voor S^3 en de kaart (U_3^-, π_3) voor S^2, waarbij

$$U_4^+ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_4 > 0\}, \qquad \pi_4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3),$$
$$U_3^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 < 0\}, \qquad \pi_3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2).$$

Ga als volgt te werk:

(i) Zoek een kromme $\mathbf{c}$ die op S^3 ligt en door $\mathbf{m}$ gaat met raakvector $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{\mathbf{m}}$.

(ii) Bereken $h \circ \mathbf{c}$ en vind de raakvector aan $h(\mathbf{m})$ die bij de gevonden kromme hoort.