Examen Differentiaalmeetkunde (27 juni 2023, 8u30–12u30)

Enkele instructies

- Schrijf op elk blad dat je afgeeft **je naam en je studentennummer**. Bladen zonder naam worden niet verbeterd.
- Schrijf je antwoorden op het theoriegedeelte en het oefeningengedeelte op **aparte** bladen. Als je klaar bent met theorie geef je die antwoorden af, en haal je je cursus om verder te werken aan de oefeningen.
- Geef een **zo duidelijk mogelijk** antwoord op **alle** vragen die gesteld worden. Het is de bedoeling om ons te overtuigen dat je het antwoord op de vraag weet.
- Noteer ook iets als je het antwoord op een vraag **niet** weet. Bv. "Theorie 2 (b): Geen antwoord".

Veel succes!

Theorie (gesloten boek)

1. (3,5 ptn) Beschouw een reguliere kromme $\mathbf{c} :]a,b[\to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \mathbf{c}(t)$.
   (a) Wanneer wordt de parameter t booglengte van de kromme genoemd?
   (b) Voor een algemene parameter t (niet per se booglengte), definieer een gepaste functie $\phi :]a,b[\to]c,d[$ voor zekere c en d en bewijs voor deze functie de volgende eigenschappen: ϕ is een C^∞ diffeomorfisme, en $\tilde{\mathbf{c}} :]c,d[\to \mathbb{R}^3 : s \mapsto \mathbf{c}(\phi^{-1}(s))$ heeft booglengte als parameter.

2. (3 ptn) Beschouw een oppervlak $\boldsymbol{\sigma} : U \to \Sigma$.
   (a) Zij $P \in \Sigma$. Definieer de tweede grondvorm in P. Geef ook de definitie van de coëfficiënten die in de definitie optreden.
   (b) Zij $\mathbf{c} : s \mapsto \boldsymbol{\sigma}(q^1(s), q^2(s))$ een kromme op het oppervlak met booglengte als parameter. De normale kromming $\frac{1}{\rho_n}$ en geodetische kromming $\frac{1}{\rho_g}$ van $\mathbf{c}$ zijn gedefinieerd via de uitdrukking $\mathbf{c}'' = \frac{1}{\rho_n}\mathbf{N} + \frac{1}{\rho_g}\mathbf{N} \times \mathbf{t}$. Leid een uitdrukking voor $\frac{1}{\rho_n}$ af in termen van de tweede grondvorm. Leid ook een uitdrukking af voor de normale kromming voor krommen met algemene parameter (niet per se booglengte).
   (c) Zij $P \in \Sigma$ en l een raaklijn aan Σ in P. Definieer de normale kromming horende bij het koppel (P, l) en leg uit waarom deze definite zin heeft. Geef ook de meetkundige interpretatie hiervan (zonder bewijs, maar leg wel de constructie uit).

3. (3,5 ptn) Beschouw een differentieerbare variëteit M en $m \in M$. Zij (U, ϕ) een toelaatbare kaart met $m \in U$ en coördinaten $(q^1, \ldots, q^n)$.

   (a) Definieer de actie van de raakvector $\frac{\partial}{\partial q^i}\big|_m$ op een element van $\mathcal{F}_m(M)$.

   (b) Ga expliciet na dat $\frac{\partial}{\partial q^i}\big|_m$ voldoet aan de drie axioma's van een raakvector.

   (c) Beschouw nu een C^∞-kromme c door m. Definieer de raakvector $v_m \in T_m M$ aan c door m. Leid ook een uitdrukking voor de coëfficiënten v^i af wanneer we v_m uitdrukken ten opzichte van de basis $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\big|_m\}$: $v_m = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}\big|_m$

Oefeningen (open boek)

1. (3,5 ptn) Zij $\mathbf{c}(s) :]a, b[\to \mathbb{R}^3$ een reguliere kromme met booglengte als parameter, met kromming $\frac{1}{\rho}(s) > 0$ en wringing $\tau(s) > 0$ zodanig dat het middelpunt $\mathbf{m}(s) = \mathbf{c}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s) + \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}\mathbf{b}(s)$ van de osculatiebol, constant is. Bewijs dat $\mathbf{c}(s)$ op een bol ligt.

2. (6,5 ptn) Beschouw de *parabolische cilinder* Σ_P met parametervoorstelling

$$\sigma_P(x, y) = \left(x,\ y,\ \frac{1}{2}x^2\right), \qquad (x, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R},$$

en de *helicoïde* Σ_H met parametervoorstelling

$$\sigma_H(x, y) = (x\cos y,\ x\sin y,\ y), \qquad (x, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}.$$

   (a) Beide oppervlakken zijn regeloppervlakken. Wat zijn de beschrijvenden van de parabolische cilinder? Wat zijn de beschrijvenden van de helicoïde?

   (b) Bepaal alle asymptotische lijnen van de parabolische cilinder door het punt $P = (2, 2, 2)$.

   (c) Toon aan: het diffeomorfisme $\Phi : \Sigma_P \to \Sigma_H : \sigma_P(x, y) \mapsto \sigma_H(x, y)$ is oppervlaktegetrouw.

   (d) Bestaat er een isometrie tussen Σ_P en Σ_H? Verklaar je antwoord.