INHAALEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA

Vrijdag 12 januari 2024

eerste bachelor Fysica & Sterrenkunde

- Je beschikt over **4 uur** om dit examen op te lossen. Lees de opgaven grondig voor je begint, denk rustig na en schrijf je antwoord zo duidelijk mogelijk op.
- Je antwoorden komen op het geruite papier. Theorie en oefeningen worden **apart ingediend** en per oefening neem je een nieuw geruit blad. Zorg dat op elk blad je **naam** staat en dien ook een blad in als je een opgave niet maakt. De blanco papieren zijn kladpapier en hoef je niet in te dienen.
- Alle **nota's** mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een **verwijzing** volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt. Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle **voorgaande deeltjes**, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Het gebruik van een rekentoestel is **verboden**, evenals het gebruik van smartphone, tablet en andere elektronische toestellen. Deze zijn uitgeschakeld en liggen niet bij je. Elke **poging tot spieken** kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens.
- Leg je **studentenkaart** klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- **Veel succes!**

Theorie

Opgave 1. (3 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren of verder op te bouwen.

(i) In stelling 6.3.5 gebruikt men dat de unie van basissen van eigenruimten een lineair afhankelijke verzameling is. Leg uit waarom en 6.3.4.(1) is niet afdoende.

(ii) Verderbouwend op stelling 5.5.2, toon aan dat de dimensie van de grootste minor van een vierkante matrix A met niet-nul determinant gelijk is aan de rang van A.

(iii) Onderstel $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Toon aan dat als $C = AB$ en $C = (C_1 ... C_n)$ de kolommen van C, dan is $C_k = b_{1,k}A_1 + ... + b_{n,k}A_n$, waarbij de A_i de kolommen van A zijn.

Opgave 2. (4 punten) We noemen matrices $A, B \in M_n(K)$ simultaan, als er een $S \in M_n(K)$ bestaat zodat zowel $S^{-1}AS$ en $S^{-1}BS$ diagonaalmatrices zijn.

(i) Geef een voorbeeld van 2 diagonaliseerbare matrices die niet simultaan zijn.

(ii) Toon aan dat als A en B simultaan zijn, dat dan $AB = BA$.

(iii) Stel dat $AB = BA$ en A n verschillende eigenwaarden heeft. Toon aan dat A en B simultaan zijn. Tip: Bekijk wat er gebeurt met een eigenvector van A als je die links vermenigvuldigt met B. Wat betekent dit voor de eigenruimten van A.

Opgave 3. (3 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Als K-vectorruimte zijn $K[X]$ en $\oplus_{i \in \mathbb{N}} K$ isomorf.

(ii) Als A, B, C deelruimten zijn van een vectorruimte V en $A \cap B = A + C$ en $B \cap C = A + B$ dan is $A = B = C$.

(iii) Als A, B diagonaliseerbare $n \times n$-matrices zijn dan is $A + B$ diagonaliseerbaar.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 4. (5 punten) Beschouw volgend stelsel over $\mathbb{Q}$ met parameter $a \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a \\ x + (a+1)y + z = 1 - 2a \\ x + y + (a+1)z = a - 1 \end{cases}$$

(i) Bespreek de oplosbaarheid en het aantal vrijheidsgraden (voor de onbekenden x, y en z) voor alle waarden van de parameter a.

(ii) Bepaal voor elk van de oplossingsverzamelingen de affiene deelruimte D die erdoor wordt opgespannen. Geef de affiene deelruimte als $v + \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_k)$, met v een vector en $\{b_1, \ldots, b_k\}$ een basis voor de onderliggende vectorruimte van D. Geef aan in welke gevallen de affiene deelruimte ook een vectordeelruimte is.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 5. (5 punten) Zij L_A de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bekomen door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} .$$

We beschouwen dus de afbeelding

$$L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Bepaal een nieuwe basis $\mathcal{B}$ voor $\mathbb{R}^3$ zodat L_A ten opzichte van de nieuwe basis wordt voorgesteld door een diagonaalmatrix.