

Theoretische mechanica

Theorie-examen

Academiejaar 2025-26

Enkele afspraken:

- Schrijf je naam en richting (Wiskunde of F&S) op elk blad.
- Het is niet nodig om voor elke vraag een nieuw blad te nemen, alles kan onder elkaar.
- Als je een vraag niet oplost: schrijf toch het nummer van de vraag, gevolgd door "geen antwoord".
- Verzorg je wiskundige notatie. Vectorgrootheden krijgen een pijltje bovenaan.
- Maak duidelijk wat je aan het doen bent, dus geen opeenvolging van formules zonder context.

Vraag 1 (4/10)

Toon aan dat de Lagrangiaan niet-uniek is, m.a.w dat de Lagrange vergelijkingen invariant zijn als een totale tijdsafgeleide van een functie h van de veralgemeende coördinaten en de tijd, $\frac{d}{dt}h(q_1, \dots, q_k, t)$, bij de Lagrangiaan wordt opgeteld. Doe dit zowel via de variationele formulering als expliciet via de Lagrange bewegingsvergelijkingen.

Vraag 2 (3/10)

Toon aan dat, in geval van een attractieve invers-kwadratische krachtwet $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$, de Laplace - Runge - Lenz vector $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r}$ een behouden grootheid is, en geef een geometrische interpretatie. Hierbij is $\vec{p}$ de impuls, $\vec{L}$ het draaimoment, en $\vec{r}$ de positievector van het deeltje.

Vraag 3 (3/10)

Leid de canonische vergelijkingen van Hamilton af voor een systeem met Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k, t)$.

Theoretische mechanica

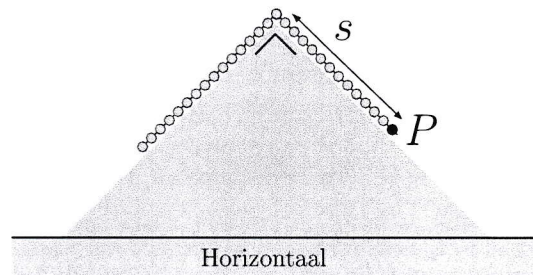
Oefeningenexamen

Academiejaar 2025-26

Enkele afspraken:

- Schrijf je naam en richting (Wiskunde of F&S) op elk blad.
- Het is niet nodig om voor elke vraag een nieuw blad te nemen, alles kan onder elkaar.
- Als je een vraag niet oplost: schrijf toch het nummer van de vraag, gevolgd door "geen antwoord".
- Verzorg je wiskundige notatie.

Opgave 1 (5/10)



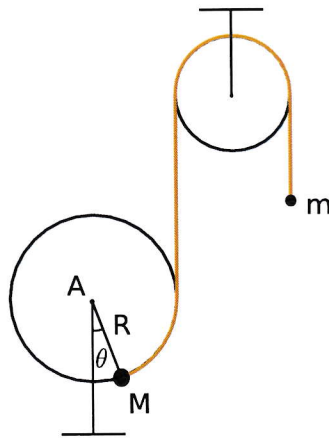
Een homogene ketting met lengte L en massa M kan wrijvingsloos glijden over een vast driehoekig blok (zie figuur). De driehoek heeft twee gelijke benen met lengte L die in de top een rechte hoek vormen. Aan het uiteinde van het rechterdeel van de ketting (punt P op de figuur) is een extra puntmassa M bevestigd. De zwaartekracht werkt in op de ketting en de extra massa. Op een begintijdstip $t = 0$ is het systeem in rust met de helft van de ketting links en de helft rechts van de top.

- Bereken de kinetische en potentiële energie van het systeem. Neem als veralgemeende coördinaat $s \in [0, 1]$ de fractie van de ketting rechts van de top.
Hint: de ketting is homogeen, dus de massa van het rechterdeel van de ketting is

sM en de massa van het linkerdeel is $(1-s)M$. Het is een goed idee om het linkerdeel en het rechterdeel van de ketting afzonderlijk te beschouwen bij het opstellen van de potentiële energie. Vergeet ook de extra puntmassa M in P niet.

- Stel de Lagrange bewegingsvergelijking op en los ze op gegeven de beginvoorwaarden.
- Bonusvraag: wat als het blok niet vast is, maar wrijvingsloos kan glijden over het horizontale vlak en een massa $2M$ heeft?

Opgave 2 (5/10)



Werk in het verticale xy -vlak. Een massa M zit vast op de rand van een massaloze schijf met straal R . De schijf kan vrij roteren rond zijn vaste middelpunt A . De massa M hangt vast aan een massaloos touw dat rond de schijf gaat en dan verticaal omhoog rond een tweede massaloze schijf hangt (zie figuur). Aan het andere uiteinde van het touw hangt een tweede massa m die enkel verticaal kan bewegen. Gebruik als veralgemeende coördinaat de hoek θ die de straal van A naar de massa M maakt met de verticale. Neem aan dat $M > m$, en dat $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Op beide massa's M en m werkt de zwaartekracht in.

- Stel de kinetische en de potentiële energie op en bepaal de Lagrange bewegingsvergelijking.
- Bepaal het stabiele evenwicht en de frequentie van de (kleine) normaaltrilling. Bespreek wat er gebeurt met het stabiele evenwicht en de frequentie in de twee limietgevallen $M \gg m$ (M veel groter dan m) en $M \approx m$ (dus M een tikje groter dan m).