EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA

MAANDAG 6 JANUARI 2025

EERSTE BACHELOR FYSICA

THEORIE

Opgave 1. (4 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal kleine uitbreidingen op de cursusnota's te bewijzen.

(i) Toon de volgende bewering aan: Stel $\{b_1, ..., b_n\}$ is een basis van een vectorruimte V en $\{c_1, ..., c_n\}$ een verzameling van vectoren in een vectorruimte W. Dan bestaat er een unieke lineaire afbeelding $f : V \to W$ zodat $f(b_i) = c_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$.

(ii) Stel $\mathcal{B}$ is een basis van een vectorruimte V en $f : V \to V$ een endomorfisme zodat de geassocieerde matrix $A_{f,\mathcal{B}}$ gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Preciseer en verklaar voor welke basis $\mathcal{C}$ van V de geassocieerde matrix $A_{f,\mathcal{C}}$ gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Stel eveneens de overgangsmatrix van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{C}$ op.

(iii) Zij $A \in M_n(K)$ en T_A de verzameling van matrices B in $M_n(K)$ zodat ABA^{-1} een diagonaalmatrix is. Toon aan dat T_A een n-dimensionale deelruimte is van $M_n(K)$.

(iv) Zij V een n-dimensionale vectorruimte. Toon aan dat de doorsnede van $k < n$ deelruimten van dimensie $n - 1$ minstens dimensie $n - k$ heeft.

Opgave 2. (2 punten) In deze vraag tonen we aan dat voor diagonaliseerbare matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ de lineaire afbeeldingen L_A en L_B tegelijk diagonaliseerbaar zijn t.o.v. eenzelfde basis als en slechts $AB = BA$.

→ zie oud exam

eigenruimte invariant door links vermenigvuldigen

(i) Zij λ een eigenwaarde van A. Toon aan dat als $AB = BA$, dan is $L_B(\mathrm{Eigr}_\lambda(A)) \subseteq \mathrm{Eigr}_\lambda(A)$.

(ii) Toon aan dat als $AB = BA$, dan bestaat er een basis van $\mathbb{C}^n$ zodat de geassocieerde matrices van de lineaire afbeeldingen L_A en L_B diagonaalmatrices zijn. Gebruik hiervoor het vorige puntje en het volgende lemma (dat je mag gebruiken zonder bewijs) "Zij $W \leq \mathbb{C}^n$ een deelruimte en f een endomorfisme van V zodat $f|_W$ een endomorfisme van W is. Dan is $f|_W$ diagonaliseerbaar, als f diagonaliseerbaar is."

(iii) Toon aan dat als L_A en L_B diagonaliseerbaar zijn t.o.v. dezelfde basis voor $\mathbb{C}^n$, dan is $AB = BA$.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij W_1, W_2, W_3 deelruimten van een eindigdimensionale vectorruimte V met $W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_3$, dan is $W_2 \cong W_3$.

(ii) Zij $A, B \in M_n(K)$ met λ_A (resp. λ_B) een eigenwaarde van A (resp. B). Dan is $\lambda_A \lambda_B$ een eigenwaarde van AB.

(iii) Zij A een diagonaliseerbare matrix en B een matrix rij-equivalent met A, dan is B ook diagonaliseerbaar.

(iv) Zij V een vectorruimte en f een endomorfisme van V zodat voor elke $v \in V$ geldt dat $f(f(v)) = f(v)$. Dan is $\ker f = 0$.

Oefeningen

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 4. (6 punten) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zij L_A de lineaire afbeelding op $\mathbb{R}^3$ gegeven door linksvermenigvuldiging met A. Definieer $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als volgt:

$$\langle x, y \rangle = x^t A y.$$

In deel (i) en (iv) wordt aangetoond dat $\langle .,. \rangle$ een inproduct is.

(i) Toon aan dat $\langle .,. \rangle$ symmetrisch is, en lineair in het eerste argument.

(ii) Toon aan dat $(1,1,3)^t$ een eigenvector is van L_A met eigenwaarde 1.

(iii) Toon aan dat alle eigenwaarden van L_A strikt positief zijn.

(iv) Toon met behulp van Gevolg 8.4.4 aan dat $\langle x, y \rangle := x^t A y$ positief-definiet is.

(v) Bereken, ten opzichte van het gegeven inproduct, de hoek tussen de vectoren $x = (0,2,3)^t$ en $y = (-3,2,1)^t$.

Nieuw geruit blad

Opgave 5. (4 punten) Zij V de verzameling van afbeeldingen van $\{1,2,3,4\}$ naar $\mathbb{Q}$. Definieer een optelling en scalaire vermenigvuldiging als volgt. Zij $f, g \in V$ en $\lambda \in \mathbb{Q}$, dan

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i),$$
$$(\lambda * f)(i) = \lambda * f(i).$$

Met deze bewerkingen vormt V een vectorruimte.

(i) Ga eigenschappen (V2), (V3) en (V5) van Definitie 2.1.1 na voor V.

(ii) Zij $\varphi \in V^*$. Noteer

$$W = \{ f \in V \mid \varphi(f) = f(2) \}.$$

Is W een deelruimte van V? Motiveer je antwoord.

(iii) Zij $f, g, h \in V$ gegeven door

$$\begin{aligned} &f(1) = 0, \quad f(2) = -1, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 2, \\ &g(1) = 1, \quad g(2) = -3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = -2, \\ &h(1) = 2, \quad h(2) = 0, \quad h(3) = 0, \quad h(4) = 1. \end{aligned}$$

Is $\{f, g, h\}$ een lineair onafhankelijke verzameling van V? Motiveer je antwoord.