Statistiek I, Bachelor Wiskunde (Prof. C. Ley)
Examen Augustus 2021

Tussen haakjes staan de indicatieve punten. Veel succes !

Vraag 1 (10 punten)

Beantwoord volgende vragen met JA/NEE en een heel korte motivatie (max 2 lijnen per vraag). Het juiste antwoord alleen geeft 0 punten, het juiste antwoord met approximatieve verklaring 1 punt en het juiste antwoord met juiste verklaring de volledige 2 punten per vraag.

(a) Stel X en Y onafhankelijk van elkaar. Dan is de conditionele dichtheidsfunctie van X gegeven Y gelijk aan de marginale dichtheidsfunctie van Y.

(b) Zij f en g dichtheidsfuncties. Dan is $\alpha f - \beta g$ een geldige dichtheidsfunctie $\Longleftrightarrow \alpha - \beta = 1$.

(c) $\mathrm{E}[X + Y + Z] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y + Z]$ geldt enkel als X onafhankelijk is van de som $Y + Z$.

(d) De maximum likelihood schatters zijn steeds verschillend van schatters bekomen via de momentenmethode.

(e) Convergentie in verdeling impliceert soms convergentie in kans.

Vraag 2 (30 punten)

(a) We werpen (eerlijke) munten op tot het moment dat we de sesde keer munt gooien. De stochastische veranderlijke X is het aantal keer dat we kop hebben geworpen. Wat is de verdeling van X ?

(b) Zij X en Y twee onafhankelijke toevalsveranderlijken waar X een Poisson verdeling met parameter $\lambda > 0$ volgt en Y een Bernoulli verdeling met parameter $p > 0$. Bereken de verdeling van $P = XY$ en $S = X + Y$. Zijn P en S onafhankelijk van elkaar ?

(c) Zij de kansvariabele X uniform verdeeld tussen a en b ($a, b \in \mathbb{R}$). Bepaal de momentgenererende functie $\psi_X(t)$ en **gebruik deze** om de verwachtingswaarde van X te bepalen.

Vraag 3 (40 punten)
De gezamelijke dichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{\sigma y}{x^2}} \mathrm{I}(y \geq 0)$$

met $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal de marginale verdeling van X en de conditionele verdeling van Y.

(b) Bepaal $E[Y]$, $E\left[\frac{Y}{X^2}\right]$, $Var\left(\frac{Y}{X^2}\right)$, $Var\left((X - \mu)^2\right)$ en $\mathrm{Cov}\left((X - \mu)^2, \frac{Y}{X^2}\right)$.

(c) Zijn X en $\frac{Y}{X^2}$ onafhankelijk? Toon aan.

(d) Bepaal de maximum likelihood schatters van μ en σ.

(e) Toon aan dat deze schatters convergeren in kans naar μ en σ.

(f) Stel dat μ gekend is en dus niet geschat hoeft te worden, wat is dan de maximum likelihood schatter voor σ? Bepaal de asymptotische distributie van deze schatter.

Vraag 4 (20 punten)

In deze oefening wensen we de verloop van een virale ziekte te berekenen. Hiervoor veronderstellen we een oneindig grote populatie van (nog) gezonde mensen en n zieke personen. Elke ziek persoon ontmoet per dag P gezonde personen, waar P een Poisson verdeling met parameter $\lambda > 0$ volgt. Ieder contact leidt tot een besmetting van de gezonde persoon met kans $p \in [0, 1]$, en dit onafhankelijk van de andere contacten. Elke nieuw besmette persoon kan ook direct de daaropvolgende dag een gezonde besmetten. We veronderstellen hier dat een zieke persoon de hele tijd ziek en besmettelijk blijft. We veronderstellen ook dat de zieke personen enkel gezonde personen ontmoeten en dat geen gezonde persoon twee zieke personen per dag ontmoet.

(a) Toon aan dat de hoeveelheid mensen dat 1 zieke persoon op 1 dag besmet Poisson-verdeeld is.

(b) Zij W_i het aantal besmette personen op het einde van dag i (dus $W_0 = n$) en Z_i het aantal nieuwe zieken na dag i. Toon dat de verdeling van $Z_i | W_{i-1}$ de Poisson$(W_{i-1} p\lambda)$ is.

(c) Bereken $\mathrm{E}[W_i]$, het verwacht aantal zieke personen na dag i.