EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN MEETKUNDE I

23 AUGUSTUS 2024

EERSTE BACHELOR WISKUNDE

- Je beschikt over **4 uur** om dit examen op te lossen. Lees de opgaven grondig voor je begint, denk rustig na en schrijf je antwoord zo duidelijk mogelijk op.
- Je antwoorden komen op het geruite papier. Theorie en oefeningen worden **apart ingediend** en per oefening neem je een nieuw geruit blad. Zorg dat op elk blad je **naam** staat en dien ook een blad in als je een opgave niet maakt. De blanco papieren zijn kladpapier en hoef je niet in te dienen.
- Alle **nota's** mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een **verwijzing** volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt. Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle **voorgaande deeltjes**, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Het gebruik van een rekentoestel is **verboden**, evenals het gebruik van smartphone, tablet en andere elektronische toestellen. Deze zijn uitgeschakeld en liggen niet bij je. Elke **poging tot spieken** kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens.
- Leg je **studentenkaart** klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- **Veel succes!**

Opgave 1. (4 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(i) Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en W een deelruimte van V. Dan noteren we de orthogonale projectie, zoals in Definitie 8.2.8 als proj_W. Toon aan dat $\mathrm{proj}_W : V \to V$ een projectie operator is.

(ii) In Definitie 6.1.7 definiëren we het spoor $\mathrm{Tr}(A)$ van een vierkante matrix A. Zij V een vectorruimte en $f : V \to V$ een lineaire afbeelding. Noteer met A_f de matrix geassocieerd aan f t.o.v. een specifieke basis $\mathcal{B}$. Toon, in detail, aan dat $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A_f)$ onafhankelijk is van de gekozen basis $\mathcal{B}$.

(iii) Zij $\mathbb{K}$ een eindig veld met q elementen. Dan is het aantal mogelijke basissen (met volgorde in acht gehouden) voor een m-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{K}$ gegeven door $(q^m - 1)(q^m - q)\dots(q^m - q^{m-1})$.

(iv) Zij $f, g : V \to \mathbb{K}$ twee lineaire vormen van een eindigdimensionale vectorruimte V naar het onderliggende veld $\mathbb{K}$. Toon aan dat $\ker f = \ker g$ als en slechts als $f = \lambda g$ voor een niet-nul element $\lambda \in \mathbb{K}$.

Opgave 2. (2 punten) Zij $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ een lineaire afbeelding. We noemen een vector $v \in \mathbb{C}^n$ een veralgemeende eigenvector met eigenwaarde λ en exponent d, als $(f - \lambda\mathrm{id})^d v = 0$ en $(f - \lambda\mathrm{id})^{d-1} v \neq 0$ met $d \geq 1$. Zij v een veralgemeende eigenvector met eigenwaarde λ en exponent d.

(i) Noteer $u_j = (f - \lambda\mathrm{id})^j v$. Toon aan dat een lineaire combinatie $c_j u_j + \dots + c_{d-1} u_{d-1}$, met $c_j \neq 0$ en $0 \leq j \leq d-1$, een veralgemeende eigenvector met eigenwaarde λ en exponent $d - j$ is.

(ii) Bewijs dat de verzameling $\mathcal{B} = \{u_0, \dots, u_{d-1}\}$ een lineair onafhankelijke verzameling.

(iii) Toon aan dat er een eigenvector w bestaat zodat λ de bijbehorende eigenwaarde is.

(iv) Schrijf de geassocieerde matrix voor de restrictie van f tot de deelruimte met basis $\mathcal{B}$.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij V een $\mathbb{K}$-vectorruimte en X een deelverzameing van V. Noteer $\mathrm{Som}(X)$ voor de verzameling van alle mogelijke eindige sommen van elementen in X (binnen V). Noteer $\mathrm{Veelv}(X)$ voor de verzameling van alle mogelijke elementen van de vorm λx met $x \in X$ en $\lambda \in \mathbb{K}$. Dan is

$$\mathrm{Veelv}(\mathrm{Som}(X)) = \langle X \rangle .$$

(ii) Zij A, B matrices zodat BA en AB bestaan. Als $AB = I_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dan is $BA = I_n$.

(iii) Zij $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$. Als er een polynoom $p(T) \in \mathbb{Q}[T]$ bestaat zodat $p(A) = 0_n$, dan geldt voor elke eigenwaarde λ van A ook dat $p(\lambda) = 0$. In het bijzonder is elke mogelijke eigenwaarde van A de wortel (nulpunt) van een polynoom over $\mathbb{Q}$.

(iv) Voor elke lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ geldt dat $\mathbb{R}^n = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

OEFENINGEN

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 4. (5 punten) Beschouw een eindig-dimensionale vectorruimte V over een veld K en zij f een endomorfisme van V.

(i) Bewijs dat $\ker(f^3) = \ker(f)$ als en slechts als $\ker(f^2) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$.

Stel nu dat $A \in M_n(K)$ zodanig is dat $A^3 = A$.

(ii) Bepaal alle mogelijke eigenwaarden van A.

(iii) Toon aan dat $V = \ker(L_A) \oplus \operatorname{im}(L_A)$.

Opgave 5. (5 punten) Zij $c \in \mathbb{R}$ en beschouw in $\mathbb{R}^4$ de vector $p_c = (c, 4, 1, -c)^t$ en het hypervlak $H_c = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{R}^4 \mid c(x + z) - y + t = 0\}$.

(i) Voor welke waarde(n) van $c \in \mathbb{R}$ is p_c parallel aan H_c dan wel staat p_c orthogonaal op H_c?

(ii) Bepaal alle $c \in \mathbb{R}$ waarvoor $\operatorname{dist}(p_c, H_c) = 2\sqrt{2}$.

Zij V_c het vlak in $\mathbb{R}^4$ bepaald door de vergelijkingen $x - y + c(z + t) = 0$ en $x + z + t = 1$.

(iii) Schrijf $H_c \cap V_c$ als $v + \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ met $v \in \mathbb{R}^4$ en $\{b_1, \ldots, b_k\}$, $k \leq 4$, een basis voor de onderliggende vectorruimte van $H_c \cap V_c$.