Examen Lineaire algebra en meetkunde II

Oefeningen

dinsdag 13 juni 2023, 08:30

- Uiterlijk om **12:00** dien je het examen in.
- Schrijf **je naam** op elk blad, leg je **studentenkaart** klaar.
- De cursus, andere cursussen, de oefeningen en hun oplossingen behoren tot het toegelaten materiaal. Maak je gebruik van een resultaat dat hierin te vinden is, **verwijs** er dan ook naar.
- Gsm's zijn **uitgeschakeld**, evenals ander elektronisch materiaal. Overleg met medestudenten en buitenstaanders is strikt **verboden**.
- Met elk van de drie opgaven kan je $\frac{10}{3}$ **punten** verdienen.
- De puntjes waaruit een opgave bestaat kunnen **onafhankelijk** van elkaar opgelost worden (het is niet omdat je (i) niet kan dat je (ii) niet kan, enz.). Indien gewenst mag je wel steunen op de opgaven van eerdere puntjes, mits verwijzing.
- Zorg voor een duidelijke opbouw in je antwoord; tussenstappen en berekeningen worden steeds **gemotiveerd**.
- Het is geen wedstrijd schoonschrift, maar schrijf **leesbaar**.
- **Denk goed na**, start niet halsoverkop.
- Veel succes!

Opgave 1. Beschouw een affiene ruimte $\mathcal{A}$ van dimensie tenminste drie. We breiden $\mathcal{A}$ uit tot een nieuwe ruimte $\mathbb{P}$, waarin parallelle rechten snijden in een oneigenlijk punt p_∞, één voor elke parallelklasse van $\mathcal{A}$. Twee oneigenlijke punten p_∞ en q_∞ bepalen een oneigenlijke rechte $\langle p, q\rangle_\infty$ als en slechts als de corresponderende parallelklassen tot evenwijdige vlakken van $\mathcal{A}$ behoren.

(i) Zij Δabc een affiene driehoek in $\mathbb{P}$. Toon aan dat elke rechte die Δabc snijdt in twee zijden ook de derde zijde snijdt, hoekpunten niet inbegrepen.

Zij Δpqr en Δxyz twee affiene driehoeken in $\mathbb{P}$ die niet in eenzelfde vlak van $\mathcal{A}$ liggen en stel dat de corresponderende zijden van Δpqr en Δxyz elkaar op eenzelfde rechte $L \subseteq \mathbb{P}$ snijden.

(ii) Bewijs dat de verbindingsrechten van Δpqr en Δxyz door één punt gaan als L een oneigenlijke rechte is.

(iii) Bewijs dat de verbindingsrechten van Δpqr en Δxyz door één punt gaan ook als L een affiene rechte is.

Opgave 2. Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en beschouw de familie van afbeeldingen $q_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$q_{\alpha,\beta}(x, y, z) = x^2 + 2\alpha xy + 2xz + \beta z^2$$

ten opzichte van de standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ van $\mathbb{R}^3$.

(i) Toon aan dat $q_{\alpha,\beta}$ een kwadratische vorm is voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Is $q_{\alpha,\beta}$ anisotroop over $\mathbb{R}^3$? Zo ja, bewijs dit. Zo nee, bepaal dan een niet-triviale deelruimte van $\mathbb{R}^3$ waarover $q_{\alpha,\beta}$ wél anisotroop is.

(iii) Bewijs dat $q_{\alpha,\beta}$ niet-ontaard is als en slechts als $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$.

In het vervolg nemen we α en β zó dat $q_{\alpha,\beta}$ niet-ontaard is.

(iv) Geef een basis van $\mathbb{R}^3$ ten opzichte van dewelke de matrixvoorstelling van $q_{\alpha,\beta}$ een diagonaalmatrix is. Wat zijn de rang en signatuur van $q_{\alpha,\beta}$?

Opgave 3. Beschouw de niet-ontaarde hyperbool $\mathcal{H}$ en kegelsnede $\mathcal{K}$ gegeven door de respectievelijke kwadratische vergelijkingen

$$\mathcal{H} : x^2 - y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{K} : x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0.$$

(i) Bepaal de aard van $\mathcal{K}$ en ga na dat ze niet-ontaard is.

(ii) Toon aan dat de vergelijkingen van de asymptoten van de niet-ontaarde hyperbool $\mathcal{H}$ gegeven worden door $y = 1 - x$ en $y = 1 + x$.

In het vervolg duiden we de asymptoten van $\mathcal{H}$ aan door $\ell_\pm : y = 1 \pm x$.

(iii) Bewijs dat de pool van ℓ_- ten opzichte van $\mathcal{K}$ op ℓ_+ ligt.

Zij ℓ de poollijn van $\ell_- \cap \ell_+$ ten opzichte van $\mathcal{K}$.

(iv) Bepaal de snijpunten van ℓ met $\mathcal{K}$ en toon aan dat ℓ evenwijdig is aan ℓ_-.

Oplossingen

Opgave 1. (puntenverdeling: 3+1, 3+1, 4+1))

(i) Zij L een rechte die Δabc snijdt in de twee zijden $\langle a, b\rangle$ en $\langle a, c\rangle$ en stel $L = \langle p, q\rangle$ met $p = L \cap \langle a, b\rangle \notin \{a, b\}$ en $q = L \cap \langle a, c\rangle \notin \{a, c\}$. Als L een oneigenlijke rechte is, dan zal ook $L \cap \langle b, c\rangle \neq \emptyset$ daar de zijden van Δabc alle niet parallel zijn aan elkaar en in hetzelfde vlak $\langle a, b, c\rangle$ liggen, dus we mogen aannemen dat L een affiene rechte is. Als p of q oneigenlijk is, dan is $L||\langle a, b\rangle$ of $L||\langle a, c\rangle$, dus $L \subseteq \langle a, b, c\rangle$. Zo niet, dan is wederom $L \subseteq \langle a, b, c\rangle$. In beide gevallen is $L||\langle b, c\rangle$ of L snijdt $\langle b, c\rangle$. Als $L||\langle b, c\rangle$, dan snijden ze in een oneigenlijk punt, welke verschillend is van b en c daar Δabc een affiene driehoek is. Als L en $\langle b, c\rangle$ elkaar snijden in een affien punt, dan kan dit punt niet b of c zijn; zo wel, dan valt L samen met $\langle a, b\rangle$ of $\langle a, c\rangle$ en moet p of q samenvallen met a, een strijdigheid. Het gestelde volgt.

Bonuspunt: het correct bespreken van de gevallen waarin L een oneigenlijk punt bevat en waarin L een oneigenlijke rechte is.

(ii) Stel dat de snijpunten van de corresponderende zijden van Δpqr en Δxyz op een oneigenlijke rechte L liggen. Als Δpqr en Δxyz twee rechten gemeen hebben, dan liggen ze in eenzelfde vlak, een strijdigheid. Als ze minstens een punt gemeen hebben, dan moet dit punt op L liggen, strijdig met het feit dat de driehoeken affien zijn. We mogen dus aannemen dat Δpqr en Δxyz disjunct zijn.

Dan geldt $\langle p, q\rangle||\langle x, y\rangle$, maar ook $\langle p, r\rangle||\langle x, z\rangle$ en $\langle q, r\rangle||\langle y, z\rangle$ in $\mathcal{A}$, ofwel Δpqr en Δxyz zijn evenwijdig. Daar $\dim(\mathcal{A}) \geqslant 3$, is de affiene stelling van Desargues van toepassing, ofwel $\Delta pqr \bowtie \Delta xyz$. Als Δpqr en Δxyz oneigenlijk centraal zijn, dan geldt in $\mathcal{A}$ dat $\langle p, x\rangle||\langle q, y\rangle||\langle r, z\rangle$. Bijgevolg snijden $\langle p, x\rangle$, $\langle q, y\rangle$ en $\langle r, z\rangle$ in eenzelfde oneigenlijk punt in $\mathbb{P}$. Als Δpqr en Δxyz niet oneigenlijk centraal zijn, dan snijden $\langle p, x\rangle$, $\langle q, y\rangle$ en $\langle r, z\rangle$ in een affien punt. In beide gevallen snijden de verbindingsrechten van Δpqr en Δxyz dus in één punt, zoals te bewijzen was.

Bonuspunt: het correct aantonen dat Δpqr en Δxyz disjunct moeten zijn.

(iii) Zoals in (ii) hebben de driehoeken geen twee rechten gemeen, maar ook geen enkele rechte daar anders de corresponderende zijden in een rechte snijden en niet op een rechte. Stel dus eerst dat Δpqr en Δxyz een punt gemeen hebben, zegge $p = x$. Dan is $L = \langle p, \langle q, r\rangle \cap \langle y, z\rangle\rangle$. In het vlak

$\langle\langle q,r\rangle,\langle y,z\rangle\rangle$ zijn de rechten $\langle q,y\rangle$ en $\langle r,z\rangle$ snijdend of evenwijdig, ofwel snijdend in een affien of oneigenlijk punt. In het eerste geval nemen we de rechte door dit snijpunt en $p = x$, en in het tweede geval een evenwijdige aan $\langle q,y\rangle$ of $\langle r,z\rangle$ door $p = x$. In beide gevallen gaan de verbindingsrechten van Δpqr en Δxyz dus door één punt.

Stel vervolgens dat Δpqr en Δxyz disjunct zijn en zij $L = \langle a,b,c\rangle$ met $a = \langle p,q\rangle \cap \langle x,y\rangle$, $b = \langle p,r\rangle \cap \langle x,z\rangle$ en $c = \langle q,r\rangle \cap \langle y,z\rangle$ en beschouw de affiene vlakken $\alpha = \langle\langle p,q\rangle,\langle x,y\rangle\rangle$, $\beta = \langle\langle p,r\rangle,\langle x,z\rangle\rangle$ en $\gamma = \langle\langle q,r\rangle,\langle y,z\rangle\rangle$ van $\mathcal{A}$ (merk op dat hoogstens één van de punten a, b en c oneigenlijk kan zijn). Dan vinden we $\langle p,x\rangle,\langle q,y\rangle \in \alpha$, maar ook $\langle p,x\rangle,\langle r,z\rangle \in \beta$ en $\langle q,y\rangle,\langle r,z\rangle \in \gamma$. Als dan in $\mathcal{A}$ geldt dat $\langle p,x\rangle||\langle q,y\rangle||\langle r,z\rangle$, dan snijden ze in een oneigenlijk punt in $\mathbb{P}$ zoals gevraagd, dus veronderstel dat tenminste één paar rechten in een affien punt snijdt, zegge $s = \langle p,x\rangle \cap \langle q,y\rangle$. Als beide andere paren evenwijdig zijn, dan volgt $\langle p,x\rangle||\langle r,z\rangle||\langle q,y\rangle$, een strijdigheid, dus we mogen ook veronderstellen dat z.v.v.a. $t = \langle p,x\rangle \cap \langle r,z\rangle$. Als $s \neq t$, dan vinden we $\langle p,x\rangle = \langle s,t\rangle \subseteq \langle\langle q,y\rangle,\langle r,z\rangle\rangle = \gamma$, ofwel Δpqr en Δxyz liggen in eenzelfde vlak, een strijdigheid. Bijgevolg is $s = t$, dus $\langle p,x\rangle$, $\langle q,y\rangle$ en $\langle r,z\rangle$ snijden in eenzelfde affien punt. In beide gevallen snijden de verbindingsrechten van Δpqr en Δxyz dus wederom in één punt, zoals te bewijzen was.

Bonuspunt: het correct bespreken van het geval waarin Δpqr en Δxyz juist één hoekpunt gemeen hebben.

Opgave 2. (puntenverdeling: 1, 2, 3, 4)

(i) Zij $v, w \in \mathbb{R}^3$ willekeurig. Uit Stelling 3.6.9 halen we dat $q_{\alpha,\beta}$ een kwadratische vorm is als en slechts als $q_{\alpha,\beta}(\lambda v) = \lambda^2 q_{\alpha,\beta}(v)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en de afbeelding $b_{\alpha,\beta}(v,w) = q_{\alpha,\beta}(v+w) - q_{\alpha,\beta}(v) + q_{\alpha,\beta}(w)$ een bilineaire vorm is. Beide eigenschappen zijn eenvoudig na te gaan; voor de tweede eigenschap is het handig om op te merken dat $b_{\alpha,\beta}(v,w)$ symmetrisch is, dus enkel lineariteit in het eerste (of tweede) argument hoeft aangetoond te worden.

Alternatieve aanpak: uiteraard kan ook de definitie van kwadratische vormen gebruikt worden.

(ii) Het is eenvoudig na te gaan dat $q_{\alpha,\beta}(e_2) = 0$, dus $q_{\alpha,\beta}$ is niet anisotroop over $\mathbb{R}^3$. De vectorrechte opgespannen door e_1 is een voorbeeld van een deelruimte waarover $q_{\alpha,\beta}$ anisotroop is.

(iii) Uit Stelling 3.6.11 volgt dat $q_{\alpha,\beta}$ niet-ontaard is als en slechts als haar geassocieerde kwadratische vorm $b_{\alpha,\beta}(v,w) = q_{\alpha,\beta}(v+w) - q_{\alpha,\beta}(v) - q_{\alpha,\beta}(w)$, $v, w \in \mathbb{R}^3$, niet-singulier is. Schrijven we $v = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ en $w = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, dan bekomen we

$$b_{\alpha,\beta}(v,w) = 2x_1x_2 + 2\alpha(x_1y_2 + x_2y_1) + 2(x_1z_2 + x_2z_1) + 2\beta z_1z_2.$$

Veronderstellen we nu dat $u = (x, y, z) \in \mathrm{rad}(b_{\alpha,\beta})$, dan volstaat het om te eisen dat $b_{\alpha,\beta}(u, e_1) = b_{\alpha,\beta}(u, e_2) = b_{\alpha,\beta}(u, e_3) = 0$ daar $\{e_1, e_2, e_3\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$. Dit geeft $x + \alpha y + z = \alpha x = x + \beta z = 0$. Als $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$, dan is $x = 0$ en dus $x + \beta z = 0 \implies \beta z = 0 \implies z = 0$. Tot slot vinden we $x + \alpha y + z = 0 \implies \alpha y = 0 \implies y = 0$, dus $u = 0$, ofwel $q_{\alpha,\beta}$ is niet-ontaard. Echter, als $\alpha = 0$ of $\beta = 0$, dan voldoet $u = (0, 1, -\alpha)$, ofwel $q_{\alpha,\beta}$ is ontaard. We concluderen dat $q_{\alpha,\beta}$ niet-ontaard is als en slechts als $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$.

Alternatieve aanpak: Uit Oefening B.20 halen we dat $b_{\alpha,\beta}(v,w)$ niet-singulier is als en slechts haar corresponderende matrix A_b niet-singulier is. Deze matrix wordt gegeven door

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 2\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\beta \end{pmatrix},$$

dus $\det(A_b) = -8\alpha^2\beta$. Deze determinant is niet nul als en slechts als $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$, dus we concluderen dat $q_{\alpha,\beta}$ niet-ontaard is als en slechts als $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$.

(iv) We voeren coördinaattransformaties uit om de dubbeltermen in $q_{\alpha,\beta}$ weg te werken. We splitsen het kwadraat van x af en bekomen

$$\begin{aligned} q_{\alpha,\beta}(x,y,z) &= (x + \alpha y + z)^2 - \alpha^2 y^2 - 2\alpha yz - (1-\beta)z^2 \\ &= (x + \alpha y + z)^2 - (\alpha y + z)^2 + \beta z^2. \end{aligned}$$

We kiezen nu nieuwe coördinaten (x', y', z') met $x' = x + \alpha y + z$, $y' = \alpha y + z$ en $z' = z$. De overgangsmatrix wordt dan gegeven door

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

en heeft determinant gelijk aan α, dus deze basisovergang is geldig daar $\alpha \neq 0$ wegens niet-ontaardheid van $q_{\alpha,\beta}$. Ten opzichte van de basis $\{e_1 + \alpha e_2 + e_3, \alpha e_2 + e_3, e_3\}$ van $\mathbb{R}^3$ is dan $q_{\alpha,\beta}(x', y', z') = x'^2 - y'^2 + \beta z'^2$. Bijgevolg heeft $q_{\alpha,\beta}$ signatuur gelijk aan $\mathrm{sgn}(\beta) \neq 0$ en rang gelijk aan 3 daar $\beta \neq 0$ wegens niet-ontaardheid van $q_{\alpha,\beta}$.

Opgave 3. (puntenverdeling: 1, 2, 3, 4)

(i) De homogene vergelijking van $\mathcal{K}$ wordt gegeven door $\varphi_{\mathcal{K}}(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2 - 4xz - 8yz + 16z^2$. Haar aard halen we uit $\delta = aa' - b''^2$, met hier $a = 1 = a'$ en $b'' = -1$; we vinden $\delta = 1 - (-1)^2 = 0$, dus $\mathcal{K}$ is een parabool. De parabool $\mathcal{K}$ is niet-ontaard als en slechts $\Delta = \det(A) \neq 0$, met A de matrix van de symmetrische bilineaire vorm behorende tot de parabool $\mathcal{K}$, gegeven door

$$f_{\mathcal{K}}(v,v') = xx' - (xy' + x'y) + yy' - 2(xz' + x'z) - 4(yz' + y'z) + 16zz',$$

waarin $v = (x,y,z)$ en $v' = (x',y',z')$. We bekomen

$$\begin{aligned}\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 16 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 16 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (16-16) + (-16-8) - 2(4+2) = -36 \neq 0.\end{aligned}$$

We besluiten dat $\mathcal{K}$ inderdaad niet-ontaard is, dus $\mathcal{K}$ is een niet-ontaarde parabool.

(ii) De homogene vergelijking van de niet-ontaarde parabool $\mathcal{H}$ wordt gegeven door $\varphi_{\mathcal{H}}(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2yz + z^2$. Uit Stelling 4.6.10 volgt dat de vergelijkingen van de asymptoten van $\mathcal{H}$ gegeven worden door $\varphi_{\mathcal{H}}(x,y,z) - \frac{\Delta}{\delta}z^2 = 0$; zoals in (i) vinden we $\delta = aa' - b''^2 = -1$ en

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

dus de vergelijkingen van de asymptoten van $\mathcal{H}$ worden gegeven door $0 = x^2 - y^2 + 2yz + z^2 - \frac{-2}{-1}z^2 = x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = x^2 - (y-z)^2$, ofwel $y = z - x$ en $y = z + x$. In het affiene vlak $z = 1$ geeft dit $y = 1 - x$ en $y = 1 + x$.

(iii) Daar $\mathcal{K}$ niet-ontaard is, volgt uit Lemma 4.4.9 dat $\ell_-^{\perp} = p^{\perp} \cap q^{\perp}$ met $p, q \in \ell_-$ verschillend; we nemen $p = (1,0,1)$ en $q = (0,1,1)$. Met $f_{\mathcal{K}}$ zoals gegeven in (i) vinden we voor $v = (x,y,z)$ dat

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{K}}(v,p) &= x - y - 2x - 2z - 4y + 16z, \\ f_{\mathcal{K}}(v,q) &= -x + y - 2x - 4y - 4z + 16z. \end{aligned}$$

In het affiene vlak $z = 1$ is dus $p^{\perp} : -x - 5y + 14 = 0$ en $q^{\perp} : -3x - 3y + 12 = 0$. Elk punt op $q^{\perp}$ voldoet dan aan $x + y = 4$ en ligt op $p^\perp$ als $0 = -x - 5y + 14 = -(x+y) - 4y + 14 = 10 - 4y$, ofwel $y = \frac{5}{2}$. Bijgevolg is $x = \frac{3}{2}$, dus $\ell_-^\perp = \{(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1)\}$. We zien dat $\ell_-^\perp$ voldoet aan $y = 1 + x$ en dus inderdaad op ℓ_+ ligt.

(iv) Het snijpunt van ℓ_- en ℓ_+ voldoet aan $y = 1 - x$ en $y = 1 + x$; het is eenvoudig te zien dat $\ell_- \cap \ell_+ = \{(0,1,1)\}$. We gaan na dat $(0,1,1)$ niet op $\mathcal{K}$ ligt:

$$\varphi_\mathcal{K}(0,1,1) = 1 - 8 + 16 = 9 \neq 0.$$

Bijgevolg is de poollijn $(0,1,1)^\perp$ van $\ell_- \cap \ell_+$ de rechte door de snijpunten van $\mathcal{K}$ met de raaklijnen door $(0,1,1)$. De unie van deze raaklijnen wordt volgens Stelling 4.6.8 gegeven door de kegelsnede $\mathcal{K}'$ met kwadratische vergelijking

$$\varphi'(x,y,z) = \left(x\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial x_1} + y\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial y_1} + z\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial z_1} \right)^2 - 4\varphi_\mathcal{K}(x_1,y_1,z_1)\varphi_\mathcal{K}(x,y,z),$$

waarin hier $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$ en $\nabla\varphi_\mathcal{K}(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial z_1}\right)$. We berekenen

$$\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial x} = 2x - 2y - 4z, \quad \frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial y} = 2y - 2x - 8z \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial z} = -4x - 8y + 32z,$$

dus $\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial x_1} = -6 = \frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial y_1}$ en $\frac{\partial \varphi_\mathcal{K}}{\partial z_1} = 24$. In het affiene vlak $z = 1$ krijgen we dan

$$\begin{aligned}
\varphi'(x,y,z) &= (-6x - 6y + 24)^2 - 36(x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 8y + 16) \\
&= 36x^2 + 36y^2 + 576 + 72xy - 288x - 288y \\
&\quad - 36x^2 + 72xy - 36y^2 + 144x + 288y - 576 \\
&= 144xy - 144x = 144x(y-1).
\end{aligned}$$

De raaklijnen door $(0,1,1)$ aan $\mathcal{K}$ vinden we door $\varphi'(x,y,z) = 0$ op te lossen; dit geeft $x = 0$ of $y = 1$. Het snijpunt van de raaklijn $x = 0$ met $\mathcal{K}$ halen we uit $0 = \varphi_\mathcal{K}(0,y,1) = y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$ en wordt dus gegeven door $(0,4,1)$, terwijl het snijpunt van de raaklijn $y = 1$ met $\mathcal{K}$ gegeven wordt door $(3,1,1)$ daar $0 = \varphi_\mathcal{K}(x,1,1) = x^2 - 2x + 1 - 4x - 8 + 16 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. De rechte door $(0,4,1)$ en $(3,1,1)$ heeft richtingscoëfficiënt gelijk aan -1 en is dus inderdaad evenwijdig aan ℓ_-.

Alternatieve aanpak: Uit (iii) volgt dat $\ell = q^\perp$, ofwel ℓ heeft vergelijking $x + y = 4$ in het affiene vlak $z = 1$. We zien al gelijk dat de richtingscoëfficiënt van ℓ gelijk is -1 en dus is ℓ evenwijdig aan ℓ_-. De snijpunten van ℓ met $\mathcal{K}$ worden dan gegeven door de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0. \end{cases}$$

Dit geeft

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x(4-x) + (4-x)^2 - 4x - 8(4-x) + 16 \\ &= x^2 - 8x + 2x^2 + 16 - 8x + x^2 - 4x - 32 + 8x + 16 \\ &= 4x^2 - 12x = 4x(x-3), \end{aligned}$$

dus $x = 0$ of $x = 3$. Uit $x + y = 4$ halen we dan dat de snijpunten van ℓ met $\mathcal{K}$ gegeven worden door $(0, 4, 1)$ en $(3, 1, 1)$.