

OPGAVEN

Opgave 1 (1+1 punten).

- (1) Toon aan dat $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continu en } (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \in \mathbb{Q}\}$ aftelbaar is
- (2) Toon aan dat de kardinaliteit van de verzameling $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$ gelijk is aan de cardinaliteit van $\mathbb{R}$

Opgave 2 (2+2 punten). Stel een gedecoreerde bewijsboom op voor de volgende formules, waarbij je de bewijsregel $\perp E$ alleen mag gebruiken in de vorm van ex falso quodlibet, d.w.z. uit falsum mag je iedere formula afleiden (Dus in het bijzonder zou men een formule B niet mogen afleiden van een formule $\neg\neg B$)

- (1) $(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \vee B)$
- (2) $\exists x(A(x) \vee B) \rightarrow (\exists x A(x)) \vee B$ (x treedt hierbij niet op in B).

Opgave 3 (3 punten).

Zij G een eindig voortgebrachte groep en H een echte deelgroep van G . Toon aan dat er een maximale echte deelgroep van G bestaat die H bevat. (Als jij het sleutelwoord voor de juiste bewijsmethode correct aangeeft is dat al een punt waard)

Opgave 4 (3 punten).

Zij L_{ring} de taal van commutatieve ringen met 1. Deze taal bevat dus constanten 0 en 1 en de binaire functiesymbolen $+$ en $\cdot$. De gehele getallen vormen een commutatieve ring $\mathbb{Z}$. Zij $T := \{\varphi \mid \varphi \text{ is een } L_{ring}\text{-zin en } \mathbb{Z} \models \varphi\}$. Toon aan dat er een aftelbaar model $\mathbb{M}$ van T bestaat dat niet isomorf is met $\mathbb{Z}$. (Als jij het sleutelwoord voor het bewijs correct aangeeft is dat al een punt waard)

Opgave 5 (3 punten). Zij $\mathcal{B}$ een substructuur van een structuur $\mathcal{A}$ met domeinen B and A . Stel dat voor een willekeurig stelsel van eindig veel elementen $a_1, \dots, a_m$ in B en voor een willekeurig element a in A een isomorfisme τ van $\mathcal{A}$ naar $\mathcal{A}$ bestaat met $\tau(a_i) = a_i$ voor $1 \leq i \leq m$ en $\tau(a) \in B$. Toon aan dat $\mathcal{B}$ een elementaire substructuur van $\mathcal{A}$ is. (Als jij het sleutelwoord voor de juiste bewijsmethode correct aangeeft is dat al een punt waard)

Opgave 6 (2+2+1 punten). De taal L_G van de theorie van ongerichte grafen bevat een binair relatie symbool E en de volgende axioma's: $\forall x \neg E(x, x)$, $\forall x \forall y E(x, y) \rightarrow E(y, x)$. Een ongerichte graaf is een L_G structuur zodat daarin de axioma's van de theorie van de ongerichte grafen geldig zijn. De theorie EA bevat naast alle axioma's voor ongerichte grafen ook de volgende extensie-

axioma's: $\forall x_1 \dots \forall x_{k+l} \left[\left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right) \rightarrow$

$$\exists y \left(\left(\bigwedge_{i \leq k} E(x_i, y) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i > k} (\neg E(x_i, y) \wedge x_i \neq y) \right) \right) \Big]$$

Een ongerichte graaf heet universeel als hij model van de theorie EA is

- (1) Toon aan dat de theorie EA kwantooreliminatie heeft
- (2) Toon aan dat de theorie EA ω -categorisch is
- (3) Toon aan dat de theorie EA compleet (volledig) is. (Hiervoor mag U de beweringen van de andere delen van deze opgave zonder bewijs toepassen)