

Oefeningenexamen topologie en metrische ruimten

Arne Hendrickx

2022-2023

Oefening 1. Een topologische groep is een groep $(G, \cdot)$ uitgerust met een topologie waarvoor de groepsbewerking $G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$ en de inversie $G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ continu zijn.

Een deelgroep N van een groep G wordt *normaal* genoemd als $N^g := g^{-1}Ng \subseteq N$ voor alle $g \in G$. Een deelgroep H van een topologische groep G noemen we *discreet* als de relatieve topologie op H de discrete topologie is.

Zij N een discrete normale deelgroep van een samenhangende topologische groep G . Toon aan dat N bevat is in het centrum $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$ van G .

Oefening 2. We willen bewijzen dat $\text{SO}(3) = \{A \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1, A^T = A^{-1}\}$ padsamenhangend is. In de volledige oefening mag je gebruiken dat een rotatie over een hoek θ in een vlak wordt gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{SO}(2),$$

en dat elke matrix in $\text{SO}(2)$ van deze vorm is.

1. Beschouw de eenheidsvector $e_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Toon aan dat voor elke eenheidsvector $v \in \mathbb{R}^3$ er een continu pad $R(t)$ in $\text{SO}(3)$ bestaat met $R(0) = I$ en $R(1)v = e_1$.
2. Toon aan dat een willekeurig element $A \in \text{SO}(3)$ via een continu pad verbonden kan worden met een blokdiagonaalmatrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$$

met $R_1 \in \text{SO}(2)$.

3. Besluit dat $\text{SO}(3)$ padsamenhangend is.

Oefening 3. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ meetbaar met $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = c \in [0, \infty)$. Bereken de volgende limiet en verklaar je tussenstappen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} n \log \left(1 + \frac{f(x)}{n} \right) dx.$$

Je mag hierbij gebruiken dat

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$