

Mijn voorbeeld L^AT_EX Document

A. De Clercq

1 Augustus 2003

Oefeningen.

1 Deel 1

1.1 SubTest 1

2 Deel 2

2.0.1 3. Interval-Data.

Deze soorten veranderlijken bezitten geen absoluut nulpunt. Als voorbeeld kunnen we nemen de temperatuur. Deze kan bvb. de waarden $20^{\circ}C$ of $40^{\circ}C$ aannemen. Men mag echter niet zeggen dat de tweede temperatuur dubbel zo groot is als de eerste.

Toegelaten wiskundige bewerkingen :

- Som en Verschil : $A = B + c^{st}$ of $A = B - c^{st}$
- Vermenigvuldiging (voor interne berekeningen. o.a. omzetting): $A \times B$

Voorbeelden voor interval-data zijn

- Temperaturen in graden Celsius of Fahrenheit.
- Hoogtes boven zeeniveau.

TABEL 1. *DO-waarden voor 50 meren.*

Nr. meer	DO	Nr. meer	DO
1	5.1	26	4.9
2	5.6	27	6.6
3	5.3	28	5.7
4	5.7	29	5.4
25	5.7	50	4.7

De cumulatieve frequenties voor de klassen in Tabel 4. kunnen dan geschreven worden in Tabel 5.

<i>Klasse</i>	<i>Interval</i>	<i>Middelpunt</i>	<i>Frequentie</i>	<i>Cumulatieve frequentie</i>	<i>Cumulatieve relatieve frequentie</i>
1	3.95 – 4.45	4.20	3	3	0.06
2	4.45 – 4.95	4.70	6	9	0.18
3	4.95 – 5.45	5.20	10	19	0.38
4	5.45 – 5.95	5.70	20	39	0.78
5	5.95 – 5.45	6.20	7	46	0.92
6	5.45 – 5.95	6.70	4	50	1.00

We zeggen dat twee gebeurtenissen $A \subset \Omega$ en $B \subset \Omega$ mekaar wederzijds uitsluiten, zodat ze geen gemeenschappelijke elementen bezitten (**onafhankelijk zijn, onderling exclusief**) als $A \cap B = \emptyset$. Voor deze twee mekaar uitsluitende gebeurtenissen geldt :

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$$

2.0.2 Voorbeeld :

Bij het werpen van een onvervalst dobbelsteen is de waaarschijnlijkheid dat de uitkomst kleiner is dan of gelijk aan 2 of groter is dan 5, dan bevatten deze gebeurtenissen geen gemeenschappelijke elementen. Noemen we x de uitslag van het werpen van een dobbelsteen dan kunnen we schrijven : $A = \{1, 2\}$ en $B = \{6\}$. A en B bevatten geen gemeenschappelijke elementen en zijn dus onafhankelijk, zodat :

$$\begin{aligned}
 P\{A \cup B\} &= P\{x = 1\} + P\{x = 2\} + P\{x = 6\} \\
 &= P\{1\} + P\{2\} + P\{6\} \\
 &= \frac{3}{6} = 0.5
 \end{aligned}$$

2.1 Vereenvoudigde Formule voor de Variantie

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \sum_{\forall x} (x - \mu_X)^2 f_X(x) \\ &= \sum_{\forall x} (x^2 - 2x\mu_X + \mu_X^2) f_X(x) \\ &= \sum_{\forall x} x^2 f_X(x) - 2\mu_X \sum_{\forall x} x f_X(x) + \mu_X^2 \sum_{\forall x} f_X(x) \\ &= \sum_{\forall x} x^2 f_X(x) - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \end{aligned}$$

of

$$\text{Var}[X] = \sum_{\forall x} x^2 f_X(x) - \mu_X^2$$

2.2 *Eigenschappen van de binomiale toevalsveranderlijke.*

De probabiliteitsfunctie van de binomiale toevalsveranderlijke X is :

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Berekening van de Verwachtingswaarde

$$E[X] = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{1}$$

$$= \sum_{x=0}^n \frac{x n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \tag{2}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \tag{3}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x} \tag{4}$$

$$= np \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

2.3 Gezamenlijke Distributie van Twee Toevalsveranderlijken.

1. Beschouwen we twee continue toevalsveranderlijken X en Y dan is de gezamenlijke distributiefunctie, cumulatieve distributiefunctie van X en Y :

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \quad (7)$$

2. De gezamenlijke waarschijnlijkheidsdichtheid van de twee toevalsveranderlijken X en Y is dan :

$$f_{X,Y} = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

3. Hieruit volgt dat :

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (9)$$

4. Voor $(X \Rightarrow -\infty) \cap (Y \Rightarrow -\infty)$ geldt dat $F_{X,Y}(x, y) \Rightarrow 0$.
5. Voor $(X \Rightarrow \infty) \cap (Y \Rightarrow \infty)$ geldt dat $F_{X,Y}(x, y) \Rightarrow 1$
6. Uit de definitie van de cumulatieve distributiefunctie volgt ook dat :

$$P\{(x_1 \leq X \leq x_2) \cap (y_1 \leq Y \leq y_2)\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (10)$$