

Examen Projectieve Meetkunde, 16 januari 2026

Deel I: Algemene projectieve meetkunde

Vraag 1. Onderstel dat V een vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ met $\dim(V) \geq 2$. Stel $N = \{\gamma \in \Gamma L(V) \mid \langle \bar{v}^\gamma \rangle = \langle \bar{v} \rangle, \forall \bar{v} \in V\}$. Toon aan dat N gelijk is aan $\text{Sc}(V)$, de verzameling der scalaire lineaire afbeeldingen van V op zichzelf.

Vraag 2. Onderstel dat V een driedimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$, en dat a_{ij} en a'_{ij} elementen zijn van $\mathbb{F}$ voor alle $i, j \in \{0, 1, 2\}$ met $i \leq j$. Onderstel dat ten opzichte van een bepaalde basis van V de vergelijkingen $\sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} X_i X_j = 0$ en $\sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a'_{ij} X_i X_j = 0$ éénzelfde niet-ledige absoluut irreduciebele kegelsnede C voorstellen. Toon dan aan dat er een $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ bestaat zodat $a'_{ij} = k \cdot a_{ij}$ voor alle $i, j \in \{0, 1, 2\}$ met $i \leq j$.

Vraag 3. Onderstel dat V een 4-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ en dat κ de Klein correspondentie is tussen de verzameling rechten van $\text{PG}(V)$ en de punten van $\text{PG}(\wedge^2 V)$. Wat verstaat men onder een stralenveld en stralenschoof? Toon aan dat het beeld van een stralenveld of stralenschoof onder de Klein correspondentie een vlak van de Klein kwadriek is.

Deel II: Projectieve vlakken

Vraag 4.

- (a)
 - Definieer de begrippen *projectief vlak* en *affien vlak*.
 - Onderstel dat $\mathcal{P}$ een projectief vlak is, en dat $\alpha \neq \text{id}$ een automorfisme is van $\mathcal{P}$ dat elk punt van een gegeven vierhoek in $\mathcal{P}$ vasthoudt.
 - Toon aan dat de punten en rechten in $\mathcal{P}$ die vastgehouden worden door α een projectief vlak $\mathcal{P}'$ vormen.
 - Onderstel dat $\alpha^2 = \text{id}$. Bewijs dat elk punt van $\mathcal{P}$ incident is met een rechte van $\mathcal{P}'$.
 - Toon aan dat $\mathcal{P}$ niet de orde 3 kan hebben
- (b) Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd wordt aan de hand van een verzameling R . Indien (R, T) de corresponderende ternaire ring is, bewijs dan de volgende eigenschap: voor alle $a, b, c \in R$ bestaat er juist één $x \in R$ waarvoor $T(a, b, x) = c$.
- (c) Onderstel dat T een groep is, I een verzameling met $|I| \geq 3$, en $\{T_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelgroepen van T zodat $\cup_{j \in I} T_j = T$. Onderstel ook dat voor alle $i, j \in I$ met $i \neq j$, $T_i T_j = T$ en $T_i \cap T_j = \{1\}$. Onderstel nu dat $g, h \in T$, en beschouw linkse nevenklassen gT_u en hT_v , met $u, v \in I$ en $u \neq v$. Bewijs dat deze nevenklassen juist één element gemeen hebben. Toon tevens aan dat T abels is.

Deel III: Oefeningen

Oefening 1. Zij $P_0(1, 0, 0, 0)$, $P_1(0, 1, 0, 0)$, $P_2(0, 0, 1, 0)$, $P_3(0, 0, 0, 1)$, $P_4(1, 1, 1, 1)$, $P_5(1, 0, 1, 1)$, $P_6(1, 3, 2, 1)$ punten in $\text{PG}(3, q)$. Zij φ het automorfisme van $\text{PG}(3, q)$ met fixpuntverzameling het hypervlak $W : X_3 = 0$ (de coördinaten zijn geïndexeerd als (X_0, X_1, X_2, X_3)), dat de rechte P_0P_3 afbeeldt op P_0P_5 en dat de rechte P_1P_4 afbeeldt op P_1P_6 .

- a) Is φ een elatie of een homologie? Bepaal ook het centrum.

Vind ook het beeld onder φ de volgende deelruimten.

- b) De rechte QR met $Q(1, 2, 1, 0)$ en $R(3, 3, 2, 0)$,
c) Het vlak V met vergelijking $X_2 - X_1 = 0$;
d) Het punt P_3 ;
e) Het punt $S(1, 2, 3, 4)$.

Hierbij stellen we $n \in \mathbb{N}_0$ gelijk aan $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termen}}$ met 1 de eenheid in $\text{GF}(q)$.

Oefening 2.

- a) Zij W_1, W_2, W_3 drie disjuncte deelruimten van $\text{PG}(n, q)$ met respectievelijke dimensies d_1, d_2, d_3 ($d_i \geq 1$) zodat $\langle W_1, W_2, W_3 \rangle = \text{PG}(n, q)$ en zodat $d_1 + d_2 + d_3 = n - 1$. Bewijs dat er een unieke rechte L bestaat die elk van de deelruimten W_1 , W_2 en W_3 snijdt in een punt (Hint. Wat is de dimensie van $\langle W_1, W_2 \rangle \cap W_3$?)
b) Bewijs dat er drie disjuncte rechten l_1, l_2, l_3 in $\text{PG}(4, q)$ bestaan zodat $\dim \langle l_1, l_2, l_3 \rangle = 3$.
c) Besluit dat in vraag 1.a) de rechte L niet noodzakelijk uniek is indien de voorwaarde $\langle W_1, W_2, W_3 \rangle = \text{PG}(n, q)$ wordt weggelaten.
d) Bewijs dat er minstens $q + 2$ onderling disjuncte rechten in $\text{PG}(3, q)$ bestaan