

1ste Ba Fysica & Sterrenkunde – 2/6/2025
Vectoranalyse (recto verso)

- Schrijf bovenaan je naam op elk van de vragenbladen en op elk van de bladen die je gebruikt.
- Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.
- Beantwoord vragen 1 en 2 op een geruit blad, en beantwoord vragen 3–8 op het vragenblad. Als je niet genoeg plaats hebt om te antwoorden op het vragenblad, gebruik je een geruit blad om je antwoord te vervolledigen. Kladbladen worden niet verbeterd.

1. Bewijs dat de waarde van de oppervlakte-integraal van een scalairenveld niet afhangt van de gebruikte parametervoorstelling. (Het bewijs moet niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus “analoog” of “wegens de stelling van X”, dan mag je dat ook zo schrijven.) Beantwoord deze vraag op een geruit blad.

2. Beantwoord de volgende vragen:

Stelling. Veronderstel dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan in een open bal $B((a, b), R)$ (met $R > 0$), en continu zijn in (a, b) . Dan is f afleidbaar in (a, b) .

Bewijs. We moeten aantonen dat $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) - \alpha h_1 - \beta h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ geldt.

Wegens

$$f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) = f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b) + f(a + h_1, b) - f(a, b)$$

is

$$\begin{aligned} & \frac{f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{f(a + h_1, b) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h_1}{\|\mathbf{h}\|} \end{aligned}$$

We zullen aantonen dat

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (1)$$

(Analoog voor de tweede term.) [1]

$$f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b) = h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a + h_1, b + \tilde{h}) \quad [2]$$

met $\tilde{h}$ (in feite $\tilde{h}$ afhankelijk van h_1) tussen 0 en h_2 gelegen. Vandaar is

$$\frac{f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + h_1, b + \tilde{h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)}{\|\mathbf{h}\|}$$

met

$$\left| \frac{h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + h_1, b + \tilde{h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)}{\|\mathbf{h}\|} \right| = \frac{|h_2|}{\|\mathbf{h}\|} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a + h_1, b + \tilde{h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|$$

Als $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$, dan ook $(h_1, \tilde{h}) \rightarrow (0, 0)$, en volgt $\frac{\partial f}{\partial y}(a + h_1, b + \tilde{h}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ [3].

Vandaar $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a + h_1, b + \tilde{h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \rightarrow 0$, en dus (1).

Vragen:

- [1] Hoe volgt het gevraagde hieruit, namelijk dat f afleidbaar is in (a, b) ?
- [2] Verklaar de gelijkheid.
- [3] Welke eigenschap van f stelt dit.

Stelling Zij $E \subseteq \mathbb{R}^2$ een open gebied en (P, Q) een conservatief vectorveld gedefinieerd in E . Definiëren we

$$f(x, y) := \int_{(\alpha, \beta)}^{(x, y)} P(u, v) du + Q(u, v) dv \quad ((x, y) \in E)$$

$((\alpha, \beta) \in E \text{ vast})$, dan is f afleidbaar in E , met

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Bewijs. Als de twee formules bewezen zijn, dan weten we dat f in E continue partiële afgeleiden heeft, d.i. van de klasse C^1 is, en dus zeker afleidbaar. We bewijzen de eerste formule. De tweede verloopt analoog. Neem willekeurig $(x_0, y_0) \in E$. Bij definitie is $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ de afgeleide in x_0 van de partiële functie $f_1(x) := f(x, y_0)$. Merk nu op dat

$$f_1(x) = \underbrace{\int_{(\alpha, \beta)}^{(x_0, y_0)} P(u, v) du + Q(u, v) dv}_{\text{constante}} + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P(u, v) du + Q(u, v) dv.$$

Voor x voldoende dicht bij x_0 is het lijnstuk $[(x_0, y_0), (x, y_0)] \subseteq E$.

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P(u, v) du + Q(u, v) dv = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt \quad [4]$$

zodat $f_1'(x) = P(x, y_0)$ [5]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = P(x_0, y_0).$$

Vragen:

- [4] Verklaar de formule.
 - [5] Verklaar de gelijkheid.
 - [6] Hoe volgt het gevraagde na die gelijkheid?
 - [7] Waar werd in het bewijs gebruikt dat (P, Q) conservatief is?
-

Stelling *Is f continu over het integratiegebied K , dan bestaat er een $(\xi, \eta) \in K$ waarvoor geldt dat*

$$\iint_K f(x, y) \, dx dy = f(\xi, \eta) \operatorname{opp}(K).$$

Bewijs. Noem M de grootste waarde van f op K , en m de kleinste waarde van f op K . Bijgevolg is

$$m \operatorname{opp}(K) = \iint_K m \, dx dy \leq \iint_K f(x, y) \, dx dy \leq \iint_K M \, dx dy = M \operatorname{opp}(K) \quad [8]$$

Als $\operatorname{opp}(K) = 0$, dan volgt het gevraagde ($0 = 0$). In het andere geval volgt er dat

$$m \leq \frac{\iint_K f(x, y) \, dx dy}{\operatorname{opp}(K)} \leq M \quad [9]$$

Vragen:

- [8] Waarom bestaat zo'n 'M'?
 - [9] Hoe volgt het gevraagde nu?
-

3. Vul aan: als $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glad is in een omgeving van $a \in \mathbb{R}^n$ en
dan is de inverse f^{-1} afleidbaar in $f(a)$ en is $D f^{-1}(f(a)) = \dots\dots\dots$

4. Beantwoord met JA (J) of NEE (N) (geen verdere uitleg):

(J)/(N) Als $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ afleidbaar is en $f(x, y) \neq 0$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dan is $\frac{\partial}{\partial x} \|f(x, y)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\|$

(J)/(N) Als $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en de Jacobiaanse matrix $Df(x, y) = 0$ in elk punt (x, y) van een open gebied $E \subseteq \mathbb{R}^2$, dan is f constant op E

(J)/(N) Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glad in een omgeving van a . Als $\nabla f(a) = 0$, dan bereikt f een lokaal extremum in a

(J)/(N) Zij F een continu vectorveld op een eenvoudig gebied $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Als $\int_{\partial E} F \cdot ds = 0$, dan is F conservatief op E

5. Als $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ afleidbaar is, $f(0,0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, bepaal dan de vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(0,0,2)$. Verklaar je antwoord.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

6. Zij Γ een gladde deeltromm van de kromme met vergelijking $f(x,y) = 0$, en zij f van de klasse C^1 op Γ . Is dan $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = 0$? Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

7. Als $\mathbf{F}$ en $\mathbf{G}$ conservatieve gladde vectorvelden zijn op $\mathbb{R}^3$, toon aan dat $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = 0$.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

8. Zij f en g van klasse C^2 op een eenvoudig gebied $E \subseteq \mathbb{R}^3$. Toon aan dat

$$\iint_{(\partial E)_+} f \nabla g \cdot d\sigma = \iiint_E (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy dz$$

- (Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

.....

.....

.....

.....

1ste Ba Fysica & Sterrenkunde

2/6/2025

Vectoranalyse oefeningen

- (i) *Gebruik voor elke oefening een nieuw blad.*
- (ii) *Schrijf naam en richting boven elk blad.*
- (iii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
- (iv) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
- (v) *Een tekening is niet verplicht.*
- (vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1. Bepaal het volume K , waarbij het gebied K ingesloten door de cilinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, het vlak $z = 4$ en de kegel $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

Vraag 2. Bereken de integraal

$$\int_{\Gamma} z \sqrt{1 + 4y - x^2} \, ds$$

met Γ de loodrechte projectie (parallel met de z -as) van de functie $y = x^2$ op de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. *Hint: als je bij de berekening waarden hebt die je niet kan vereenvoudigen, zoals een machtswortel die je niet kan herschrijven, maak dan gebruik van constanten zoals $t_0, t_1 \dots$ die in je antwoord mogen blijven staan.*

Vraag 3. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F} = (-y \sin(z) + y \sin(x), x \sin(z), \cos(y)).$$

1. Bepaal een Helmholtzdecompositie van $\mathbf{F}$.
2. Bepaal een Helmholtzdecompositie van $\mathbf{F}$ met als extra voorwaarde dat het scalaire veld in de decompositie voldoet aan $\varphi(0, 0, 0) = 2025$.

EINDE VAN DE OEFENINGEN